Diskrete Mathematik
Wintersemester 2015 / 2016

Hochschule RheinMain
Prof. Dr. Steffen Reith

6. Übungsblatt

1. Seien $n, a > 0$. Zeigen Sie, dass sowohl
$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i = (a+1)^n$$
als auch
$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0$$
gilt.

2. Beweisen Sie, dass eine Gruppe $(G, \cdot)$ genau dann abelsch ist, wenn $a^2b^2 = (ab)^2$ gilt.

3. Sei $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Wir definieren zwei binäre Operationen $\circ\colon A^2 \to A$ und $\diamond\colon A^2 \to A$ vermöge $\circ((a,b),(c,d)) = ((ad+bc), bd)$ und $\diamond((a,b),(c,d)) = (ac, bd)$. Zeigen Sie, dass beide Operationen kommutativ sind.

4. Sei $X^X =_{\text{def}} \{f \mid f\colon X \to X\}$ und $X \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass X^X zusammen mit der Komposition von Funktionen ein Monoid bildet.

5. Sei $T_n =_{\text{def}} \{p \mid p \text{ ist Teiler von } n\}$, $\text{ggT}(a,b)$ ist der größte gemeinsame Teiler und $\text{kgV}(a,b)$ das kleinste gemeinsame Vielfache von a und b. Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ die Algebra $(T_n, \{\text{ggT}, \text{kgV}\})$ ein Verband ist.

Besprechung in der Übung am 25. November 2015. Die Aufgaben sollen von Ihnen so vorbereitet werden, dass sie an der Tafel vorgeführt werden können. Achten Sie insbesondere auf einen korrekten mathematischen Formalismus!