

7. Übungsblatt

1. Sei $\mathcal{G} = (G, \cdot)$ eine beliebige Gruppe. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:
 - i) Die Gruppe \mathcal{G} hat *genau ein* neutrales Element.
 - ii) Zu jedem Element $g \in G$ gibt es *genau ein* inverses Element.
 - iii) Seien $a, b \in G$, dann gilt $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.
2. Sei $\mathcal{M} = (M, \cdot)$ ein Monoid und $M^* =_{\text{def}} \{m \in M \mid m \text{ ist invertierbar}\}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}^* = (M^*, \cdot)$ eine Gruppe ist. Die Gruppe \mathcal{M}^* ist auch als *Einheitengruppe* (von \mathcal{M}) bekannt.
3. Seien $\mathcal{G} = (G, \oplus)$ und $\mathcal{H} = (H, \otimes)$ Gruppen. Weiterhin ist ein Gruppenhomomorphismus $\eta: G \rightarrow H$ gegeben. Zeigen Sie:
 - i) Wenn e_G das neutrale Element von \mathcal{G} und e_H das neutrale Element von \mathcal{H} ist, dann gilt $\eta(e_G) = e_H$.
 - ii) Sei $a \in G$, dann gilt $\eta(a^{-1}) = (\eta(a))^{-1}$.
 - iii) Ist die Gruppe \mathcal{G} kommutativ und η surjektiv, dann ist auch \mathcal{H} kommutativ.
4. Sei (G, \cdot) eine beliebige Gruppe und $x \in G$. Die Menge $G_x =_{\text{def}} \{a \in G \mid a \cdot x \cdot a^{-1} = x\}$ heißt *Zentralisator* von x .
 - i) Kann $G_x = \emptyset$ gelten? Begründen Sie Ihre Aussage!
 - ii) Zeigen Sie: Ist G abelsch, dann gilt $G_x = G$ für jedes $x \in G$.
 - iii) Ist (G_x, \cdot) für alle $x \in G$ eine Untergruppe von G ?

Besprechung in der Übung am 9. Dezember 2015.