

## 8. Übungsblatt

1. Sei  $L \subseteq \Sigma^*$  eine beliebige (formale) Sprache über dem endlichen Alphabet  $\Sigma$  (d.h. eine Menge von Wörtern, die aus Buchstaben aus  $\Sigma$  gebildet werden können). Wir definieren die Relation  $\sim_L$  wie folgt:  
Seien  $x, y \in \Sigma^*$ , dann gilt  $x \sim_L y$  genau dann, wenn für alle  $z \in \Sigma^*$  gilt  $xz \in L$  gdw.  $yz \in L$ .  
Zeigen Sie, dass  $\sim_L$  eine Äquivalenzrelation ist.
2. Zeigen Sie das Kürzungsgesetz für Gruppen.
3. Sei  $\mathcal{G} = (G, \cdot)$  eine Gruppe. Wir definieren eine Familie von Abbildungen  $\pi_a: G \rightarrow G$  mit  $\pi_a(x) = a \cdot x$ , wobei  $a \in G$ . Zeigen Sie, dass jede der Abbildungen  $\pi_a$  bijektiv und total ist. Zeigen Sie weiterhin, dass die Algebra  $\Pi^G = (\{\pi_a \mid a \in G\}, \circ)$  eine Gruppe ist.
4. Sei  $(G, \cdot)$  eine beliebige Gruppe und  $x \in G$ . Die Menge  $G_x =_{\text{def}} \{a \in G \mid a \cdot x \cdot a^{-1} = x\}$  heißt *Zentralisator* von  $x$ . Eine Algebra  $(U, \cdot)$  mit  $U \subseteq G$  heißt *Untergruppe*, wenn  $(U, \cdot)$  selbst wieder eine Gruppe ist. Zeigen Sie folgenden Aussagen:
  - i) Kann  $G_x = \emptyset$  gelten? Begründen Sie Ihre Aussage!
  - ii) Zeigen Sie: Ist  $G$  abelsch, dann gilt  $G_x = G$  für jedes  $x \in G$ .
  - iii) Ist  $(G_x, \cdot)$  für alle  $x \in G$  eine Untergruppe von  $G$ ?
5. Seien  $G$  und  $H$  Gruppen und  $\eta: G \rightarrow H$  ein surjektiver Homomorphismus.
  - i) Sei  $e_G$  das neutrale Element von  $G$  und  $e_H$  das neutrale Element von  $H$ . Beweisen Sie, dass dann automatisch  $\eta(e_G) = e_H$  gilt.
  - ii) Zeigen Sie, dass wenn  $G$  abelsch ist, dann ist auch  $H$  abelsch.

Besprechung in der Übung am 16. Dezember 2015.