Diskrete Mathematik | Hochschule RheinMain
Wintersemester 2015/2016 | Prof. Dr. Steffen Reith

11. Übung

Definition 1: *Ein Algebra* $(R, +, \cdot)$ *mit den Eigenschaften*

1. $(R, +)$ *ist eine abelsche Gruppe,*
2. $(R, \cdot)$ *ist eine Halbgruppe und*
3. $\forall a, b, c \in R$ *gilt* $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *und* $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

heißt Ring*. Ist „*$\cdot$*“ kommutativ, so heißt* R kommutativer Ring*. Gibt es ein neutrales Element bzgl. „*$\cdot$*“, so heißt* R Ring mit Eins*.*

Ein einfaches Beispiel für einen kommutativen Ring mit Eins ist die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$.
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. Seien a, b, c, d und e ganze Zahlen. Zeigen Sie:
   i) Aus $a \mid b$ folgt $ac \mid bc$ für alle c,
   ii) Aus $c \mid a$ und $c \mid b$ folgt $c \mid (da + fb)$ für alle d und f,
   iii) Aus $a \mid b$ und $b \neq 0$ folgt $|a| \leq |b|$ und
   iv) Aus $a \mid b$ und $b \mid a$ folgt $|a| = |b|$.
2. Seien $n, m \in \mathbb{Z}$. Beweisen Sie, dass dann $(-m) \cdot (-n) = m \cdot n$ gilt. Funktioniert Ihr Beweis für jeden Ring?
3. Sei $(I, +, \cdot)$ ein beliebiger Ring mit dem Nullelement 0_I (d.h. das neutrale Element bzgl. „+“). Zeigen Sie: Für alle $x \in I$ gilt $0_I \cdot x = x \cdot 0_I = 0_I$.

Besprechung in der Übung am 28.1.2016