6. Übungsblatt

1. In dieser Aufgabe soll der folgende Satz überprüft werden

Satz 1: Sei $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $\text{ggT}(n^5 + 5, (n + 1)^5 + 5) = 1$.

Hinweis: Die zweistellige Funktion ggT bezeichnet den *größten gemeinsamen Teiler* zweier natürlichen Zahlen.

Lösen Sie dazu die folgenden Teilaufgaben:

- i) Entwerfen und implementieren Sie dazu ein **Java**-Programm mit dem man bis zu einer einzugebenden Grenze m überprüfen kann, ob für alle Zahlen n unter dieser Grenze m die Eigenschaft $\text{ggT}(n^5 + 5, (n + 1)^5 + 5) = 1$ haben.
Hinweis: Die beteiligten Zahlen können sehr groß werden, verwenden Sie die Klasse `BigInteger`.
 - ii) Überprüfen Sie, ob alle Zahlen $< 400\,000$ diese Eigenschaft haben. Können Sie nun sagen, ob der Satz korrekt ist? Begründen Sie Ihre Antwort!
 - iii) Überprüfen Sie, ob alle Zahlen $< 1\,000\,000$ diese Eigenschaft haben. Können Sie nun sagen, ob der Satz korrekt ist?
2. Finden Sie einen Beweis durch Widerspruch für die Aussage: „Wenn $n + m$ eine ungerade ganze Zahl ist, dann ist entweder n oder m ungerade.“
3. Seien $n, k \in \mathbb{N}$ und $k \leq n$. Dann definieren wir $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ (Fakultät) und den Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Benutzen Sie die Tatsache

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

um zu zeigen, dass es für jedes $a \in \mathbb{N}$ mit $a > 1$ ein $b \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $(a + 1)^n = a \cdot b + 1$. Sie können die Tatsache benutzen, dass alle Binomialkoeffizienten ganze Zahlen sind!

4. Für eine natürliche Zahl a sei $(a_0 a_1 a_2 \dots a_n)_{10}$ die gewohnte *Dezimaldarstellung*. Als *Quersumme* von a definieren wir

$$\text{QS}(a) = \sum_{i=0}^n a_i,$$

d.h. die Quersumme ist die Summe der Ziffern der Dezimaldarstellung.

Finden Sie einen Beweis für die Aussage: „ a ist ohne Rest durch 3 teilbar genau dann, wenn die Quersumme $QS(a)$ durch 3 teilbar.“

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 3 und die Tatsache, dass $a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$.

Besprechung in den Übungen in der KW 48 ab Donnerstag 25. November 2015.