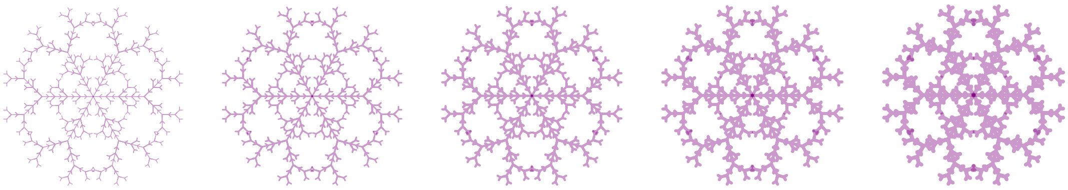
Diskrete Strukturen
Wintersemester 2015/2016

Hochschule RheinMain
Prof. Dr. Steffen Reith

8. Übungsblatt



1. Seien A und B endliche Mengen, dann gilt der folgende Zusammenhang

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$$

Dieser Zusammenhang ist als Prinzip von Inklusion-Exklusion[1] bekannt. Benutzen Sie nun dieses Prinzip.

i) Die „Unseen University (UU)“ (siehe auch `http://en.wikipedia.org/wiki/Unseen_University`) mit den innovativen Studiengängen „perfect wizardry“ und „ultra deeply embedded systems (UDES)“ (speziell gefördert durch den großzügigen Hochschulpakt 2019 $\frac{3}{4}$) bietet für Studierende des Studiengangs „ultra deeply embedded systems“ genau die zwei Vorlesungen „OOP“ und „Diskrete Strukturen“ im ersten Semester an.
Sei

$$A = \{x \mid x \text{ besucht OOP}\}$$

und

$$B = \{x \mid x \text{ besucht Diskrete Strukturen}\}.$$

Durch (mehrfache) hochkomplexe Zählprozesse konnte der lebhafte und überdurchschnittlich begabte Student Rincewind die folgenden Mächtigkeiten ermitteln: $\#A = 65$, $\#B = 85$ und 15 Studenten hören beide Vorlesungen. Wieviele Studenten sind in der UU mindestens eingeschrieben?

ii) Benutzen Sie nun ein geeignetes Venn-Diagramm, um die Richtigkeit des Prinzips von Inklusion-Exklusion zu belegen.
Hinweis: Zählen Sie die Mächtigkeiten der beteiligten Teilmengen!

iii) Seinen A, B und C Mengen. Geben Sie einen direkten Beweis für die Tatsache

$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$$

Hinweis: Denken Sie darüber nach, dass auch $A \cup B$ eine Menge ist.

2. Sei $m \geq 2$ eine natürliche Zahl, dann definieren wir die folgende Relation:

$$R_m = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m \text{ teilt } a - b \text{ ohne Rest}\}$$

Beweisen Sie, dass die folgenden drei Aussagen gelten, wenn $m \geq 2$:

[1] `http://mathworld.wolfram.com/Inclusion-ExclusionPrinciple.html`

i) Für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt $(a, a) \in R_m$.

ii) Wenn $(a, b) \in R_m$, dann ist auch $(b, a) \in R_m$.

iii) Wenn $(a, b) \in R_m$ und $(b, c) \in R_m$, dann ist auch $(a, c) \in R_m$.

3. Sei $\mathbb{N}_* = \{(a_1, \ldots, a_l) \mid \ l \geq 1 \text{ und } a_i \in \mathbb{N} \text{ für } 1 \leq i \leq l\}$ gegeben. Wir definieren nun eine Funktion $S\colon \mathbb{N}_* \to \mathbb{N}$ induktiv wie folgt:

   (IA) $S((a_1)) = a_1$

   (IS) $S((a_1, \ldots, a_{l+1})) = S((a_1, \ldots, a_l)) + a_{l+1}$

   i) Geben Sie einen sprechenden / verständlichen Namen für die Funktion S an.

   ii) Beweisen Sie mit einer Induktion über n, dass für $c \in \mathbb{N}$ die Gleichung $c \cdot S((a_1, \ldots, a_l)) = S((c \cdot a_1, \ldots, c \cdot a_l))$ gilt.

Besprechung und Vorrechnen in den Übungen ab dem 16. Dezember 2015.