20.10.2012

Einige Bemerkungen zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1

„$\Rightarrow$" Da R reflexiv ist gilt aRa für alle $a \in A$, d.h. $(a,a) \in R$ und damit $\Delta_A \subseteq R$

„$\Leftarrow$" Sei $\Delta_A \subseteq R$, dann gilt $(a,a) \in R$ für alle $a \in A$. Also aRa und somit ist R reflexiv

Aufgabe 2

„$\Rightarrow$" Da R symmetrisch ist folgt aus aRb direkt bRa.

$R \subseteq R^{-1}$: Wenn aRb, dann bRa wegen Symmetrie. Also $aR^{-1}b$, d.h. $R \subseteq R^{-1}$

$R^{-1} \subseteq R$: Wenn $aR^{-1}b$, dann bRa. Wegen Symmetrie gilt aRb, d.h. $R^{-1} \subseteq R$

„$\Leftarrow$" Sei $R = R^{-1}$. Wenn aRb, dann $aR^{-1}b$ und somit bRa, d.h. R ist symmetrisch.

Aufgabe 3

$$\text{Sei } [a]_\sim =_{def} \{ b \in A \mid a \sim b \}$$

„$\Rightarrow$" Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation, dann gilt

- $a \in [a]_\sim$, d.h. $[a]_\sim \neq \emptyset$
- $A = \bigcup_{a \in A} a \subseteq \bigcup_{a \in A} [a]_\sim \subseteq A$, d.h. die Vereinigung der Mengen $[a]_\sim$ ergibt A.

- Sei $[a]_\sim \neq [b]_\sim$. Annahme $[a]_\sim \cap [b]_\sim \neq \emptyset$, dann gibt es $d \in [a]_\sim \cap [b]_\sim$. Dann gilt für alle $c \in [b]_\sim$ direkt $a \sim d$ und $c \sim d$. Also $a \sim d$ und $d \sim c$, d.h. $a \sim c$ und $[a]_\sim \subseteq [b]_\sim$. Analog $[b]_\sim \subseteq [a]_\sim$ und somit $[a]_\sim = [b]_\sim$ $\lightning$, d.h. $[a]_\sim \cap [b]_\sim = \emptyset$.

Die gesuchte Partition besteht als aus den Mengen $[a]_\sim$.

„$\Leftarrow$" Sei $\mathcal{Z}$ eine Partition. Wir legen eine Relation $\sim$ wie folgt fest: $a \sim b$ gdw es gibt ein $Z \in \mathcal{Z}$ und $a, b \in Z$

reflexiv: Da für alle a ein Z existiert mit $a \in Z$, d.h. $a \sim a$

symmetrisch: Gilt $a \sim b$, dann $a, b \in Z$ für $Z \in \mathcal{Z}$. Somit $b, a \in Z$ und $b \sim a$

transitiv: Gibt $a \sim b$ und $b \sim c$, dann gibt es Z und Z' mit $a, b \in Z$ und $b, c \in Z'$. Da entweder $Z = Z'$ oder $Z \cap Z' = \emptyset$ muß $Z = Z'$ gelten. Also auch $a \sim c$.

#