Diskrete Mathematik
Wintersemester 2012 / 2013

Hochschule RheinMain
Prof. Dr. Steffen Reith

4. Übungsblatt

1. Seien M und N beliebige endliche Mengen. Eine Funktion $f\colon M \to N$ heißt *total*, wenn für alle $a \in M$ ein $b \in N$ existiert, so dass $f(a) = b$ gilt ($\triangleq$ der Definitionsbereich von f ist M). Beantworten Sie die folgenden Fragen und geben Sie einen Beweis für Ihre Antwort an:

   i) Wir wählen speziell $M = \overbrace{\{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\}}^{n\text{-mal}}$ und $N = \{0,1\}$. Wieviele verschiedene totale Funktionen $f\colon M \to N$ dieses Typs gibt es?

   ii) Seien $M = \{a_1, \ldots, a_j\}$ und $N = \{b_1, \ldots, b_k\}$ beliebige endliche Mengen mit $j = \#(M)$ bzw. $k = \#(N)$ Elementen. Wieviele verschiedene totale Funktionen $f\colon M^n \to N$ gibt es in diesem Fall?

   iii) Die endlichen Mengen N und M werden wieder wie in Punkt ii) gewählt. Wieviele verschiedene *injektive* und totale Funktionen $f\colon M^n \to N$ gibt es?

2. Sei $n > 0$. Zeigen Sie, dass sowohl

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

   als auch

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} = 0$$

   gilt.

3. Seien M und N beliebige endliche Mengen, $\#M = \#N$ und $\pi\colon M \to N$. Zeigen Sie, dass π bijektiv ist gdw. π injektiv und π bijektiv gdw. π surjektiv.

4. Gegeben seien zwei Abbildungen $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$. Wir definieren $g \circ f\colon A \to C$ (g *komponiert* mit f, *Kompositum* (oder Produkt) von f mit g) durch $(g \circ f)(x) =_{\text{def}} g(f(x))$.

   Zeigen Sie, dass die Abbildung $\circ$ assoziativ ist. Sei nun M eine beliebige endliche Menge. Zeigen Sie, dass das Kompositum von zwei Permutationen von M wieder eine Permutation von M ist. Gibt es eine feste Permutation e von M für die $e \circ f = f = f \circ e$ gilt, wenn f eine beliebige Permutation von M ist?

Besprechung in der Übung am 7. November 2012. Die Aufgaben sollen von Ihnen so vorbereitet werden, dass sie an der Tafel vorgeführt werden können. Achten Sie insbesondere auf einen korrekten mathematischen Formalismus!