Hochschule RheinMain
Prof. Dr. Steffen Reith

6. Übungsblatt

1. Sei $\mathcal{G} = (G, \cdot)$ eine beliebige Gruppe. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:
   i) Die Gruppe $\mathcal{G}$ hat *genau ein* neutrales Element.
   ii) Zu jedem Element $g \in G$ gibt es *genau ein* inverses Element.
   iii) Seien $a, b \in G$, dann gilt $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.
2. Sei $\mathcal{M} = (M, \cdot)$ ein Monoid und $M^* =_{\text{def}} \{m \in M \mid \ m \text{ ist invertierbar}\}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}^* = (M^*, \cdot)$ eine Gruppe ist. Die Gruppe $\mathcal{M}^*$ ist auch als *Einheitengruppe* (von $\mathcal{M}$) bekannt.
3. Seien $\mathcal{G} = (G, \oplus)$ und $\mathcal{H} = (H, \otimes)$ Gruppen. Weiterhin ist ein Gruppenhomomorphismus $\eta\colon G \to H$ gegeben. Zeigen Sie:
   i) Wenn e_G das neutrale Element von $\mathcal{G}$ und e_H das neutrale Element von $\mathcal{H}$ ist, dann gilt $\eta(e_G) = e_H$.
   ii) Sei $a \in G$, dann gilt $\eta(a^{-1}) = (\eta(a))^{-1}$.
   iii) Ist die Gruppe $\mathcal{G}$ kommutativ und η surjektiv, dann ist auch $\mathcal{H}$ kommutativ.
4. Sei $(G, \cdot)$ eine beliebige Gruppe und $x \in G$. Die Menge $G_x =_{\text{def}} \{a \in G \mid a \cdot x \cdot a^{-1} = x\}$ heißt *Zentralisator* von x.
   i) Kann $G_x = \emptyset$ gelten? Begründen Sie Ihre Aussage!
   ii) Zeigen Sie: Ist G abelsch, dann gilt $G_x = G$ für jedes $x \in G$.
   iii) Ist $(G_x, \cdot)$ für alle $x \in G$ eine Untergruppe von G?

Besprechung in der Übung am 21. November 2012.