7. Übungsblatt

1. Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine beliebige (formale) Sprache über dem endlichen Alphabet Σ (d.h. eine Menge von Wörtern, die aus Buchstaben aus Σ gebildet werden können). Wir definierten die Relation $\sim_L$ wie folgt:

   Seien $x, y \in \Sigma^*$, dann gilt $x \sim_L y$ genau dann, wenn für alle $z \in \Sigma^*$ gilt $xz \in L$ gdw. $yz \in L$.

   Zeigen Sie, dass $\sim_L$ eine Äquivalenzrelation ist.

2. Sei $T_n =_{\text{def}} \{p \mid p \text{ ist Teiler von } n\}$, $\mathrm{ggT}(a, b)$ ist der größte gemeinsame Teiler und $\mathrm{kgV}(a, b)$ das kleinste gemeinsame Vielfache von a und b. Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ die Algebra $(T_n, \{\mathrm{ggT}, \mathrm{kgV}\})$ ein Verband ist.

3. Sei $\mathcal{G} = (G, \cdot)$ eine Gruppe. Wir definieren eine Familie von Abbildungen $\pi_a \colon G \to G$ mit $\pi_a(x) = a \cdot x$, wobei $a \in G$. Zeigen Sie, dass jede der Abbildungen π_a bijektiv und total ist. Zeigen Sie weiterhin, dass die Algebra $\Pi^G = (\{\pi_a \mid a \in G\}, \circ)$ eine Gruppe ist.

4. Sei $(G, \cdot)$ eine beliebige Gruppe und $x \in G$. Die Menge $G_x =_{\text{def}} \{a \in G \mid a \cdot x \cdot a^{-1} = x\}$ heißt *Zentralisator* von x. Eine Algebra $(U, \cdot)$ mit $U \subseteq G$ heißt *Untergruppe*, wenn $(U, \cdot)$ selbst wieder eine Gruppe ist. Zeigen Sie folgenden Aussagen:

   i) Kann $G_x = \emptyset$ gelten? Begründen Sie Ihre Aussage!

   ii) Zeigen Sie: Ist G abelsch, dann gilt $G_x = G$ für jedes $x \in G$.

   iii) Ist $(G_x, \cdot)$ für alle $x \in G$ eine Untergruppe von G?

Besprechung in der Übung am 28. November 2012.