

8. Übungsblatt

1. Zwei Zyklen $f = (i_1, \dots, i_r)$ und $g = (j_1, \dots, j_s)$ heißen *disjunkt*, wenn $\{i_1, \dots, i_r\} \cap \{j_1, \dots, j_s\} = \emptyset$ gilt. Zeigen Sie, dass dann $fg = gf$ gilt.
2. Man berechne die Produkte $(1, 2)(3, 4, 5)$, $(3, 5)(4, 1, 2, 3)(5, 4, 1)$, $(1, 3, 2)(2, 4, 6, 8)$ und $(1, 2)(4, 5, 6, 3)(3, 4)(5, 6, 3)$. Weiterhin bestimme man die Inversen von $(3, 1, 2)(4, 6, 5)$, $(1, 3, 2)(2, 1, 4, 6)$, $(2, 1)(2, 3, 4, 1)$ und $(1, 6, 5)(4, 3, 2, 6, 1)$.
3. Gegeben seien die folgenden Permutationen:

i) Gegeben sei

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie π_1^2 und π_1^{-1} .

ii) Berechnen Sie π_1^{11} und π_1^{14} , wenn $\pi^n =_{\text{def}} \underbrace{\pi \circ \dots \circ \pi}_{n\text{-mal}}$ für eine beliebige Permutation π .

iii) Sei $n \geq 2$, $(a, b) \in S_n$ eine beliebige Transposition. Schreiben Sie (a, b) mit Hilfe von maximal drei Transpositionen $t_1, t_2, t_3 \in S_n$ der Form $(1, i)$, wobei $i \in \{1, \dots, n\}$, so dass $t_1 \circ t_2 \circ t_3 = (a, b)$ gilt.

4. Sei $\mathcal{G} = (G, \cdot)$ eine Gruppe und $X \subseteq G$ eine nicht leere Menge. Wir definieren das *Erzeugnis* von X wie folgt:

$$\langle X \rangle =_{\text{def}} \{x_1 \cdot \dots \cdot x_n \mid x_1, \dots, x_n \in X \cup X^{-1}, n \in \mathbb{N}\},$$

wobei X^{-1} alle inversen Elemente von Elementen aus X enthält. Beweisen Sie mit der Definition des Erzeugnisses, dass $S_n = \langle \{\sigma \mid \sigma \text{ ist Transposition} \} \rangle$ gilt. Zeigen Sie weiterhin, dass sogar $S_n = \langle \{(1, 2), (1, 3), \dots, (1, n)\} \rangle$.

Besprechung in der Übung am 5.12.2012.