Diskrete Mathematik
Wintersemester 2012/2013

Hochschule RheinMain
Prof. Dr. Steffen Reith

Klausur

1. Zeigen Sie, dass sowohl die Addition von Restklassen „$\oplus$“ als auch die Multiplikation von Restklassen „$\odot$“ ist wohldefiniert, d.h. für $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$ und $a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$ gilt: Wenn $a \equiv a' \bmod m$ und $b \equiv b' \bmod m$, dann ist auch:

   i) $[a]_{\equiv_m} \oplus [b]_{\equiv_m} = [a']_{\equiv_m} \oplus [b']_{\equiv_m}$ und
   ii) $[a]_{\equiv_m} \odot [b]_{\equiv_m} = [a']_{\equiv_m} \odot [b']_{\equiv_m}$.

2. Sei $(I, +, \cdot)$ ein beliebiger Ring mit dem Nullelement 0_I. Zeigen Sie: Für alle $x \in I$ gilt $0_I \cdot x = x \cdot 0_I = 0_I$.

3. Sei $(F, +, \cdot)$ ein beliebiger Ring mit Nullelement 0_F. Ein Ringelement $a \neq 0_F$ heißt *Nullteiler*, wenn es ein weiteres Ringelement $b \neq 0_F$ mit $a \cdot b = 0_F$ gibt. Beweisen Sie, dass jeder Körper frei von Nullteilern ist.

   Ein kommutativer Ring heißt *Integritätsbereich*, wenn er keine Nullteiler enthält. Finden Sie konkrete Beispiele für solche Ringe.

4. Sei $n \geq 2$ und $\mathbb{Z}_n^* =_{\text{def}} \{x \in \mathbb{Z}_n \mid n \text{ ist invertierbar bzgl. der Restklassenmultiplikation}\}$.

   i) Bestimmen Sie $\mathbb{Z}_6^*$.
   ii) Gilt $n - 1 \in \mathbb{Z}_n^*$ für alle $n \geq 2$? Beweisen Sie Ihre Aussage!

Besprechung in der Übung am 2. Januar 2013.