Graphen und Graphenalgorithmen

Steffen Reith
Steffen.Reith@hs-rm.de

Hochschule RheinMain

25. Januar 2013

Graphen

Definition

Ein (einfacher) gerichteter Graph $G = (V, E)$ ist ein Paar, das aus einer Menge von Knoten V und einer Menge $E \subseteq V \times V$ von Kanten (Kantenrelation) besteht.

Eine Kante $k = (u, v) \in E$ kann als Verbindung zwischen den Knoten $u, v \in V$ aufgefasst werden. Aus diesem Grund nennt man u auch Startknoten und v Endknoten.

Zwei Knoten, die durch eine Kante verbunden sind, heißen auch benachbart oder adjazent.

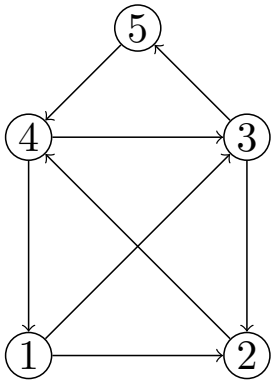
Ein Graph (V, E) heißt endlich genau dann, wenn die Menge der Knoten V endlich ist.

Wir beschäftigen uns hier nur mit endlichen Graphen

Einige Beispiele und Definition

Beispiele für gerichtete Graphen und V eine beliebige Knotenmenge

- $G_0^V = (V, \emptyset)$ („Nullgraph“)
- $G_G^V = (V, V \times V)$ („vollständiger Graph“)
- Seien $G_N = (V_N, E_N)$, $V_N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $E_N = \{(1,2), (2,4), (4,3), (3,5), (5,4), (4,1), (1,3), (3,2)\}$ („Nikolausgraph“)



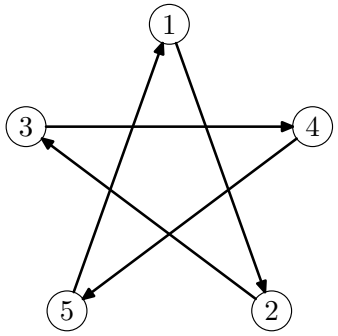
Definition

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Ist die Kantenrelation E symmetrisch, dann ist G ein ungerichteter Graph.

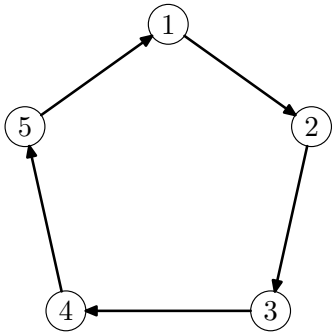
Bei einem ungerichteten Graph schreibt man für eine Kante (a, b) oft $\{a, b\}$, da die Richtung keinen Rolle spielt.

Darstellung von Graphen

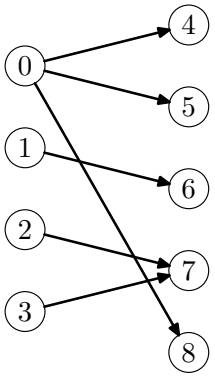
Eine Kante (u, v) kann als Verbindung zwischen den Knoten u und v interpretieren werden. $\Rightarrow$ stelle Graphen durch Diagramme dar



(a) Ein gerichteter Graph mit 5 Knoten



(b) Ein planarer gerichteter Graph mit 5 Knoten



(c) Ein gerichteter bipartiter Graph

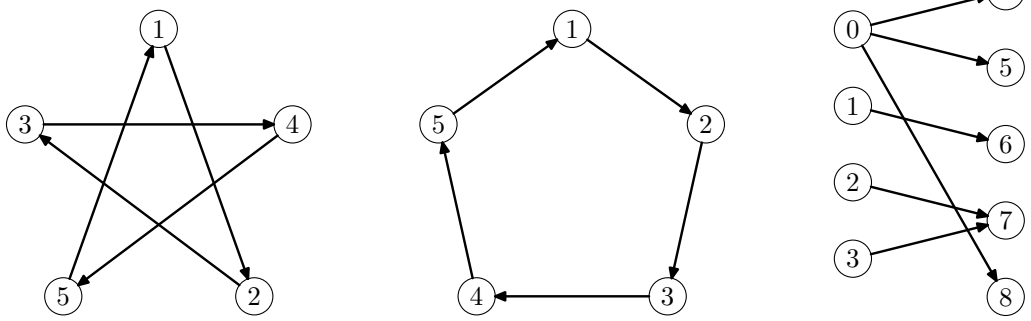
Es kann mehrere (gleichwertige) graphische Darstellungen eines Graphens geben.

Planare Graphen

Definition

Ein Graph G heißt planar, wenn er ohne Überkreuzung von Kanten gezeichnet werden kann.

Alle folgenden Graphen sind planar.



Anwendung: Platinenentwicklung

Teilgraphen

Definition (Teilgraph)

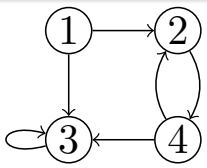
Seien $G = (V_G, E_G)$ und $H = (V_H, E_H)$ Graphen. Gilt $V_H \subseteq V_G$ und $E_H \subseteq E_G$, dann heißt H Teilgraph, Untergraph oder Subgraph (von G).

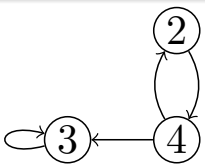
Definition (induzierter Teilgraph)

Seien $G = (V, E)$ und $V' \subseteq V$ eine Teilmenge von Knoten. Dann heißt $G_{V'} = (V', E')$ mit

$$E' = \{(u, v) \in V' \times V' \mid (u, v) \in E)\}$$

der von V' induzierte Teilgraph.

Ein Graph 

und der von $\{2, 3, 4\}$ 

induzierte Teilgraph.

Boolesche Operationen auf Graphen

Mit Hilfe der Mengenoperationen kann man sehr leicht Boolesche Operationen auf Graphen definieren:

Definition

Seien $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ Graphen, dann heißt

- $G \cup G' = (V \cup V', E \cup E')$ „Vereinigungsgraph“,
- $G \cap G' = (V \cap V', E \cap E')$ „Schnittgraph“ und
- $\neg G = (V, (V \times V) \backslash E)$ „Komplementgraph“.

Ganz ähnlich können weitere Boolesche Operationen auf Graphen mit Hilfe von anderen Mengenoperationen definiert werden.

Der Grad eines Knotens

Definition (Grad)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Die Anzahl von Kanten, wobei v Startknoten ist, heißt Ausgrad von v (engl. outdegree). Als Schreibweise wird $\mathrm{outdeg}_G(v)$ verwendet.

Die Anzahl von Kanten, wobei v als Endknoten ist, heißt Eingrad von v (engl. indegree). Als Schreibweise wird $\mathrm{indeg}_G(v)$ verwendet.

Da sich der Ein- und Ausgrad in ungerichteten Graphen nicht unterscheidet, spricht man hier kurz von Grad (Schreibweise: $\deg_G(v)$).

Ein Knoten v mit $\mathrm{indeg}_G(v) = \mathrm{outdeg}_G(v) = 0$ heißt isoliert.

Definition (regulär)

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt k-regulär, wenn alle Knoten $v \in V$ den Grad k haben.

Wege und Kreise

Definition (Weg)

Sei $G = (\{v_1, \ldots, v_n\}, \{e_1, \ldots, e_m\})$ ein ungerichteter Graph, dann heißt eine Folge $e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k} \in \{e_1, \ldots, e_m\}$ heißt Pfad / Weg (der Länge k) von u nach v, wenn für alle $e_{i_j} = (u_{i_j}, v_{i_j})$ gilt:

1. $e_{i_1} = (u, v_{i_2})$ und $e_{i_k} = (u_{i_k}, v)$
2. für $1 \leq j < k$ ist $v_{i_j} = u_{i_{j+1}}$

Ein Graph G heißt zusammenhängend, wenn für alle Knoten u und v von G ein Pfad von u nach v existiert.

Ein Pfad von u nach v heißt geschlossen, Zyklus oder Kreis, wenn $u = v$ gilt.

kreisfreie Graphen

Definition (kreisfrei)

Ein Graph heißt kreisfrei / zyklenfrei, wenn er keinen Zyklus der Länge ≥ 1 hat. Ist ein kreisfreier Graph gerichtet, so heißt er DAG (directed acyclic graph).

Ein zyklenfreier Graph heißt Wald.

Ein Wald heißt Baum, wenn er zusammenhängend ist.

Satz

Ist G ein zusammenhängender Graph mit n Knoten und $n - 1$ Kanten, dann ist G ein Baum.

Beweis.

Siehe Meinel, Mundhenk, „Mathematische Grundlagen der Informatik“ □

Datenstrukturen für Graphen

Man kann Graphen in dynamischen Datenstrukturen speichern.

Die Einträge einer Liste repräsentieren alle Knoten eines Graphen. Jeder Eintrag enthält wieder eine Liste, die alle Knoten enthält die adjazent sind.
$\Rightarrow$ Adjazenzlistendarstellung

Relativ ineffizienter Zugriff auf Kanten, aber speichereffizient bei Graphen mit wenigen Kanten. Es geht schneller:

Definition

Sei $G = (\{v_1, \ldots, v_n\}, E)$ ein gerichteter Graph und A_G eine $n \times n$ Matrix $A_G = (a_{i,j})_{1 \leq i,j, \leq n}$ mit

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{falls } (v_i, v_j) \in E \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Matrix heißt Adjazenzmatrix.

Datenstrukturen für Graphen (II)

Beispiel

Für den gerichteten Graphen (g) der vorletzten Folie ergibt sich die Adjazenzmatrix:

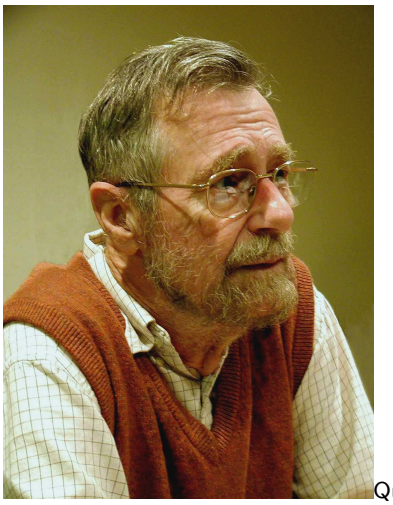
$$A_{G_5} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ungerichtete Graphen haben Adjazenzmatrizen, die symmetrisch zur Diagonale von links oben nach rechts unten sind.

Edsger Wybe Dijkstra

in der Vorlesung „Algorithmen und Datenstrukturen“ werden Algorithmen für Graphen vorgestellt und untersucht. Viele grundlegende Verfahren (z.B. ein Algorithmus zur Suche von kürzesten Wegen) wurden von Dijkstra entdeckt.

11. May 1930, Rotterdam, Holland - 6. August 2002, Nuenen, Holland



Quelle: Wikimedia Commons

Testing shows the presence,
not the absence of bugs.