Hochschule RheinMain
Wintersemester 2012/2013

FB DCSM
Prof. Dr. Steffen Reith

Probeklausur zur Vorlesung

Diskrete Strukturen

25. Januar 2013

Name:	______________	Vorname:	______________
Matrikelnummer:	______________	Unterschrift:	______________

Die folgende Tabelle ist **nicht** für Sie bestimmt, sondern für die Punkteverwaltung!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Erreichbare Punkte	8	7	10	8	12	14	45 (+14)
Erreichte Punkte							

- Die Dauer der Klausur beträgt **90 Minuten**. Zum Bestehen benötigen Sie 50% der Punkte.
- Es sind **keine** Hilfsmittel zugelassen. Entfernen Sie insbesondere Mobiltelefone, Vorlesungsmitschriften, lose Blätter und Bücher von Ihrem Tisch!
- Sollte es Unklarheiten mit den Aufgabenstellungen geben (z.B. aufgrund sprachlicher Probleme), dann können Sie, zur Klärung **dieser** Fragen, während der Klausur **kurze** Fragen stellen. Lesen Sie die Aufgabenstellungen **vollständig**!
- Die **Bindung** der Blätter dieser Klausur **darf nicht entfernt** werden!
- Aufgabe 6 ist eine **optionale** Zusatzaufgabe.
- Bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis auf den Tisch!
- Täuschungsversuche aller Art werden mit der **Note 5** geahndet! Beachten Sie, dass auch **elektronische Geräte** (z.B. Mobiltelefone) **unerlaubte Hilfsmittel** darstellen!
- Bitte schreiben Sie **deutlich**. **Unleserliche** Lösungen werden **nicht gewertet**!
- Jeder Lösungsweg muss klar ersichtlich sein. Algorithmen jeder Art sind zu **kommentieren**!
- Von der Vorlesung abweichende Notationen sind zu **definieren**!
- Am Ende finden Sie **drei leere Seiten** zur freien Verfügung. Sie können zusätzlich auch die **Rückseite** der Blätter benutzen, um Lösungen der Aufgaben darauf zu schreiben! Andere Papierbögen sind **nicht zulässig**!
- Nach der Korrektur Ihrer Klausur können Sie im Rahmen meiner **Sprechstunde** (oder nach Vereinbarung) in die Korrektur **Einsicht nehmen**.

Viel Erfolg!

Matrikelnummer: ________________________

Achten Sie in allen folgenden Aufgaben auf eine *richtige* und *ordentliche* mathematische Schreibweise (z.B. Mengenklammern). Falsche oder unklare Schreibweisen führen zu (evtl. vollständigen) Punktabzug!

Aufgabe 1 **Grundlagen** **(8 Punkte)**

Markieren Sie die folgenden Kästchen mit **R** für *richtig* und mit **F** für *falsch*. Beachten Sie, dass *Kreuze* als Markierung unzulässig sind!

- ☐ Zwei Mengen A und B sind gleich, wenn A Teilmenge von B und B Teilmenge von A.
- ☐ Die Menge der ganzen Zahlen ist nicht abzählbar.
- ☐ Seien H_1 und H_2 aussagenlogische Formeln, dann gilt $H_1 \vee (H_1 \wedge H_2) \equiv H_1$.
- ☐ Eine binäre Relation R zwischen A und B ist eine Teilmenge von $A \times B$.
- ☐ Die Potenzmenge von $\{Q, W, E, R, T, Z\}$ enthält 63 Elemente.
- ☐ Eine Funktion f heißt *injektiv*, wenn für alle Elemente a und b aus dem Definitionsbereich aus $a \neq b$ folgt $f(a) \neq f(b)$.
- ☐ Eine aussagenlogische Formel heißt *Kontradiktion*, wenn Sie von jeder Belegung erfüllt wird.
- ☐ Die Zahlen 7 und 31 sind teilerfremd.

Aufgabe 2 **Logische Grundlagen** **(7 Punkte)**

1. Gegeben sei die Formel $H = \neg((x_1 \leftrightarrow x_2) \vee x_3)$. Füllen Sie die folgende Wahrheitswertetabelle korrekt aus. Verwenden Sie die Wahrheitswerte 1 (wahr) und 0 (falsch).

x_1	x_2	x_3	$x_1 \leftrightarrow x_2$	$((x_1 \leftrightarrow x_2) \vee x_3)$	H
0	0	0	1		
0		1			
0	1				
0	1	1			
	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1		1		

2. Sei $p(x)$: „x ist Primzahl“. Formulieren Sie mit Hilfe von Quantoren eine Formel H_P für die folgende Aussage über dem Universum der natürlichen Zahlen:

„Wenn n größer 1 ist, dann existiert eine Primzahl, die n teilt.“

$H_P =$

Matrikelnummer: ________________________

3. Seien $p(x)$ und $q(x)$ beliebige Aussageformen über einem beliebigen Universum. Schreiben Sie die Formel $H = \neg(\forall x\ p(x) \vee \exists y\ q(y))$ so um, dass (die) Negation(en) *nur direkt* vor den Aussageformen p und q auftritt (auftreten).

$H \equiv$

Aufgabe 3 **Mengen und Mengenoperationen** **(10 Punkte)**

1. Gegeben sei die Menge $Z = \{M, A, D\}$. Geben Sie alle Elemente der Potenzmenge an:

$\mathcal{P}(Z) =$

2. Seien $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 7, 9\}$ und $C = \{3, 8, 9\}$ Mengen, wobei $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$, d.h. $\mathbb{N}$ ist das Universum. Bestimmen sie die folgenden Mengen:

   $i)$ $\overline{(\overline{A} \cap \overline{B})} \cup C =$ ☐

   $ii)$ $(A \cup \overline{B}) \cap A =$ ☐

3. Sei $A = \{a, b, c\}$ und $B' = \{1, 2\}$ und $B = B' \cup \{3\}$. Geben Sie die Mengen

   $i)$ $A \times B' =$ ☐ und

   $ii)$ $A \times B =$ ☐

   vollständig an.

Matrikelnummer: ________________________

4. Verwenden Sie die vollständige Induktion um die Richtigkeit der folgenden Aussage zu zeigen. Sind A und B Mengen mit $\#A = n$ und $\#B = m$, dann gilt $\#(A \times B) = n \cdot m$.
   (IA) $m = 0$:

   (IV) Wenn $\#A = n$ und $\#B = m$, dann gilt $\#(A \times B) = n \cdot m$
   (IS) $m \to m + 1$:

   Hinweis: Lassen A fest und zerlegen Sie die Menge B, so dass die **(IV)** verwendet werden kann. Evtl. ist Teilaufgabe 3 für Ihre Überlegungen hilfreich.

Matrikelnummer: ________________________

Aufgabe 4 **Relationen und Funktionen** **(8 Punkte)**

Seien $n > 1$, A' eine beliebige Menge mit $n-1$ Elementen und $A = A' \cup \{x\}$, wobei x nicht in A' vorkommt.

(a) Wieviele Elemente sind in $\mathcal{P}(A')$ bzw. $\mathcal{P}(A)$ enthalten?

$\#\mathcal{P}(A')$ = $\boxed{}$

$\#\mathcal{P}(A)$ = $\boxed{}$

(b) Gibt es eine bijektive Funktion f der Form $f\colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A')$? Begründen Sie Ihre Antwort kurz aber fundiert!

(c) Gibt es eine bijektive Funktion g der Form $g\colon \mathcal{P}(A') \to \mathcal{P}(A)$? Begründen Sie Ihre Antwort kurz aber fundiert!

5. Welche drei Eigenschaften hat eine

Äquivalenzrelation: $\boxed{}$, $\boxed{}$ und $\boxed{}$

Halbordnung: $\boxed{}$, $\boxed{}$ und $\boxed{}$

Matrikelnummer: ________________________

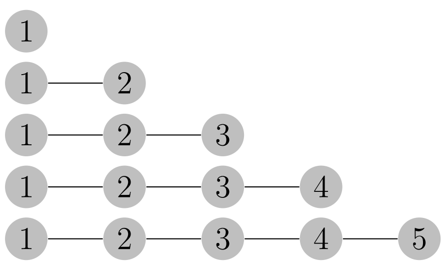
Aufgabe 5 **Graphentheorie und Induktion** **(12 Punkte)**

1. Gegeben sei der ungerichtete Graph $G_4 = (\{a, b, c, d\}, \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a), (a, c), (b, d)\})$.

   $i)$ Geben Sie eine graphische Repräsentation von G_4 an:

   $ii)$ Ist G_4 planar? $\boxed{}$ Begründen Sie Ihre Aussage!

2. Die ersten fünf *Schlangengraphen* haben die folgende graphische Repräsentation:



   $i)$ Finden Sie eine induktive Definition für alle Schlangengraphen $S_n = (V_n, E_n)$, wobei der n-te Schlangengraph die Knotenmenge $\{1, 2, \ldots, n\}$ verwendet.

   $V_n = \boxed{}$

   (IA) $E_1 =$

   (IS) $E_{n+1} =$

Matrikelnummer: ________________________

$ii)$ Beweisen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion und geeignet kommentierter Bilder bzw. graphischer Repräsentationen, dass S_n für $n \geq 1$ planar ist.
(IA)

(IV) S_n ist planar.
(IS) $n \to n+1$:

Aufgabe 6 **Bonusaufgabe** **(14 Punkte)**

1. Sei $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ die durch $f(x) = x^2$ definierte Funktion. Belegen Sie durch geeignete Zahlenbeispiele, dass f weder injektiv noch surjektiv ist.

2. Sei $B =_{\text{def}} \{x \mid x \in \mathbb{Q} \text{ und } x \neq 1\}$, $g\colon B \to B$ und

$$g(x) = \frac{x}{x-1}$$

Matrikelnummer: ________________________

Zeigen Sie, dass g bijektiv ist.

3. Sei $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, wobei $R = \{(x, y) \mid 4x - 4y \text{ ist gerade}\}$. Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist.

Matrikelnummer: ________________________

4. Geben Sie bei dieser Aufgabe immer möglichst kleine, aber positive, natürliche Zahlen für x an, sodass die angegebene Kongruenz korrekt wird:

   i) $3 * 21 \equiv x \bmod 3$, $x = \boxed{}$

   ii) $41 * 7 \equiv x \bmod 10$, $x = \boxed{}$

   iii) $17^2 \equiv x \bmod 11$, $x = \boxed{}$

   iv) $7 + 14 \equiv x \bmod 2$, $x = \boxed{}$

5. Sei A die Menge aller zu 28 teilerfremden Zahlen aus dem Interval $\langle 1, 28 \rangle$. Geben Sie alle Elemente von A explizit an:

   $A = \boxed{}$

Matrikelnummer: ________________________

Notizen 1

Matrikelnummer: ________________________

Notizen 2

Matrikelnummer: ________________________

Notizen 3