Hochschule RheinMain
Prof. Dr. Steffen Reith

# 8. Übungsblatt

1. Sei $m \geq 2$ eine natürliche Zahl, dann definieren wir die folgende Relation:

   $$R_m = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m \text{ teilt } a - b \text{ ohne Rest}\}$$

   Beweisen Sie, dass die folgenden drei Aussagen gelten, wenn $m \geq 2$:

   i) Für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt $(a, a) \in R_m$.
   ii) Wenn $(a, b) \in R_m$, dann ist auch $(b, a) \in R_m$.
   iii) Wenn $(a, b) \in R_m$ und $(b, c) \in R_m$, dann ist auch $(a, c) \in R_m$.

2. Seien $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x + y \text{ ist gerade}\}$ und $S = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

   i) Geben Sie alle $(x, y) \in R$ geeignet an, sodass $-10 \leq x \leq 10$ und $-10 \leq y \leq 10$ gilt.
   ii) Geben Sie alle Elemente Elemente von $S$ an. Finden Sie eine graphische Interpretation der Relation $S' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

3. Seien $R \subseteq A \times A$ und $S \subseteq A \times A$ Relationen.

   i) Beweisen Sie, dass $(R \cap S)^{-1} = S^{-1} \cap R^{-1}$.
   ii) Geben Sie mindestens eine weitere (binäre) Operation $\diamond$ auf Relationen an, so dass $(R \diamond S)^{-1} = S^{-1} \diamond R^{-1}$

4. Sei $O_{\mathbb{Z}} = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid (b - a) \ \in \mathbb{N}\}$. Finden Sie einen anschaulichen Namen für die Relation $O_{\mathbb{Z}}$. Beweisen Sie, dass die folgenden drei Aussagen richtig sind:

   i) $\forall a \in \mathbb{Z}$ gilt $(a, a) \in O_{\mathbb{Z}}$.
   ii) Wenn $(a, b) \in O_{\mathbb{Z}}$ und $(b, a) \in O_{\mathbb{Z}}$, dann gilt $a = b$.
   iii) Wenn $(a, b) \in O_{\mathbb{Z}}$ und $(b, c) \in O_{\mathbb{Z}}$, dann gilt $(a, c) \in O_{\mathbb{Z}}$.

   Hinweis: Es gilt $0 \in \mathbb{N}$.

Besprechung und Vorrechnen in den Übungen ab der KW 49 vom 3. Dezember 2012 bis zum 7. Dezember 2012