Hochschule RheinMain
Prof. Dr. Steffen Reith

13. Übungsblatt

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Folge von unterschiedlichen Knoten $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ mit $(v_{i-1}, v_i) \in E$ und $1 \leq i \leq k$ heißt *Pfad* oder *Weg* von v_0 nach v_k der Länge k. Ein Weg der Länge 0 besteht nur aus einem Knoten und heißt *trivialer Weg.*

1. Mit $Z \subseteq V \times V$ bezeichnen wir die binäre Relation

   $$Z = \{(u, v) \in V \times V \mid \text{ es gibt einen Weg von } u \text{ nach } v\}.$$

   Zeigen Sie, dass Z eine Äquivalenzrelation ist. Beschreiben Sie die Menge der Äquivalenzklassen von Z anschaulich.

2. Sei $i \geq 1$, $V_i = \{1, \ldots, i\}$ und $K_i = (V_i, (V_i \times V_i)\backslash\{(v, v) \mid v \in V_i\})$ der vollständige ungerichtete Graph mit i Knoten. Zeichnen Sie eine graphische Darstellung von $K_1, K_2, \ldots, K_5$. Finden Sie eine Formel, die die Anzahl der Kanten in K_i für $i > 1$ angibt und beweisen Sie diese mit Hilfe der vollständigen Induktion.

3. Die Menge der *binären Bäume* ist induktiv wie folgt definiert:

   (IA) Der ungerichtete Graph B ohne Kanten mit genau einem Knoten w ist ein binärer Baum. Dabei heißt w *Wurzel* von B.

   (IS) Sind $B_1 = (V_1, E_1)$ und $B_2 = (V_2, E_2)$ binäre Bäume mit disjunkten Knotenmengen, d.h. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ und Wurzeln w_1 bzw. w_2. Sei W der ungerichtete Graph $W = (\{w, w_1, w_2\}, \{(w, w_1), (w, w_2)\})$, wobei $w \notin V_1 \cup V_2$. Dann ist auch $B_1 \cup B_2 \cup W$ ein binärer Baum mit Wurzel w.

   Alles andere ist kein binärer Baum. Beweisen Sie mit Hilfe einer Induktion, dass zwischen zwei beliebigen Knoten in einem binären Baum ein Pfad existiert.
   Hinweis: Zeichnen Sie sich erst einige binäre Bäume graphisch auf und überlegen Sie, welche Fälle zu untersuchen sind.

Besprechung und Vorrechnen in den Übungen in der KW 4 vom 21. Januar 2013 bis zum 25. Januar 2013