

Diskrete Strukturen

- Zusatzaufgaben

Aussagenlogik -

- Zeigen Sie durch Umformen, ob die folgenden Formeln Tautologien, Kontradiktionen, oder keins von beidem sind!

$$1) [p \rightarrow (q \rightarrow r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r]$$

$$2) [x \wedge (x \rightarrow y)] \rightarrow y$$

$$3) (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

- Sind die folgenden Formelpaare jeweils äquivalent?

$$4) (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A) \stackrel{?}{\equiv} (B \rightarrow A)$$

$$5) [A \vee \neg(A \wedge B)] \wedge [C \vee (D \vee C)] \stackrel{?}{\equiv} C \vee D$$

$$6) (A \vee B \vee C) \wedge (C \vee \neg A) \stackrel{?}{\equiv} ((B \wedge \neg A) \vee C)$$

$$\begin{aligned}
\text{Aufg. 1)} \quad & p \rightarrow (q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r \\
\equiv & \neg p \vee (\neg q \vee r) \leftrightarrow \neg (p \wedge q) \vee r \\
\equiv & \underbrace{[\neg p \vee \neg q \vee r]}_A \leftrightarrow \underbrace{[\neg p \vee \neg q \vee r]}_A \\
\equiv & \text{true.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Aufg. 2)} \quad & [x \wedge (x \rightarrow y)] \rightarrow y \\
\equiv & \neg [x \wedge (\neg x \vee y)] \vee y \\
\equiv & \neg [\underbrace{x \wedge \neg x}_{\text{false}} \vee x \wedge y] \vee y \\
\equiv & \neg (x \wedge y) \vee y \\
\equiv & \neg x \vee \underbrace{\neg y \vee y}_{\text{true}} \\
\equiv & \text{true.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Aufg. 3)} \quad & (A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \\
\equiv & (\neg A \vee B) \leftrightarrow (\neg \neg B \vee \neg A) \\
\equiv & \underbrace{(\neg A \vee B)}_x \leftrightarrow \underbrace{(\neg A \vee B)}_x \\
\equiv & \text{true}
\end{aligned}$$

Aufg. 4) z.z.: $(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A) \equiv (B \rightarrow A)$

$$\begin{aligned}
 & (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A) \\
 \equiv & \neg(\neg A \vee B) \vee (\neg B \vee A) \\
 \equiv & (A \wedge \neg B) \vee \neg B \vee A \\
 \equiv & (A \vee \neg B \vee A) \wedge (\neg B \vee \neg B \vee A) \\
 \equiv & (\neg B \vee A) \wedge (\neg B \vee A) \\
 \equiv & \neg B \vee A \\
 \equiv & B \rightarrow A \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Aufg. 5) z.z.: $(A \vee \neg(A \wedge B)) \wedge (C \vee (D \vee C)) \equiv C \vee D$

$$\begin{aligned}
 & (A \vee \neg(A \wedge B)) \wedge (C \vee (D \vee C)) \\
 \equiv & (A \vee \neg A \vee \neg B) \wedge (C \vee D) \\
 \equiv & \underbrace{(A \vee \neg A \vee \neg B)}_{\text{true}} \wedge (C \vee D) \\
 \equiv & \text{true} \wedge (C \vee D) \\
 \equiv & C \vee D \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Aufg. 6) z.z.: $(A \vee B \vee C) \wedge (C \vee \neg A) \equiv ((B \wedge \neg A) \vee C)$

$$\begin{aligned}
 & (A \vee B \vee C) \wedge (C \vee \neg A) \\
 \stackrel{\text{Distributivgesetz}}{\equiv} & C \vee ((A \vee B) \wedge \neg A) \\
 \equiv & C \vee (\underbrace{A \wedge \neg A}_{\text{false}} \vee B \wedge \neg A) \\
 \equiv & C \vee (B \wedge \neg A) \quad \checkmark
 \end{aligned}$$