

4. Übungsblatt

Lösen Sie die folgenden Aufgaben:

1. Sei Γ ein beliebiges Alphabet, dann bezeichnet Γ_n eine Folge von Strings der Länge n . Wenn $a \in \Gamma$ und $\Gamma_n = (w_1, w_2, \dots, w_m)$, dann ist

$$a\Gamma_n =_{\text{def}} (aw_1, aw_2, \dots, aw_m)$$

eine Folge von Strings der Länge $n + 1$. Mit Γ_n^R bezeichnen wir die *reflektierte* Folge (w_m, \dots, w_2, w_1) und \circ symbolisiert die *Konkatenation* von Folgen, d.h. $(v_1, v_2, \dots, v_n) \circ (w_1, w_2, \dots, w_m) = (v_1, v_2, \dots, v_n, w_1, w_2, \dots, w_m)$.

Ein (binärer) *Graycode* Γ_n der Länge n kann nun leicht induktiv definiert werden:

Sei $\Gamma = \{0, 1\}$, dann

(IA) $\Gamma_0 = (\epsilon)$, wobei ϵ das leere Wort ist

(IS) $\Gamma_{n+1} = 0\Gamma_n \circ 1\Gamma_n^R$

- i) Konstruieren Sie einen binären Gray-Code mit Codewörtern der Länge 3. Was fällt Ihnen auf, wenn Sie zwei aufeinanderfolgende Codewörter betrachten? Beweisen Sie die Eigenschaft mit einer geeigneten Induktion.
 - ii) Zeichnen Sie einen dreidimensionalen Würfel und markieren Sie Knoten mit Worten aus $\{0, 1\}^3$. Dabei ist das erste Bit die *x*-Richtung, das zweite Bit die *y*-Richtung und das dritte Bit die *z*-Richtung. Durchlaufen Sie den Knoten des Würfels mit Hilfe des Gray-Codes aus der ersten Teilaufgabe und fügen Sie noch eine Kante zum Knoten 000 hinzu. Was fällt Ihnen auf? Würde die Konstruktion auch für $n > 3$ funktionieren?
2. In der Vorlesung haben wir einen Baum konstruiert, der mit Hilfe von Orakelfragen ein bestimmtes Wort eines Codes mit 8 Wörtern identifiziert. Dabei haben wir festgestellt, dass die Summe des Informationsgehalts der Fragen von Wurzel zu einem Blatt immer genau 3 Bit beträgt. Zeigen Sie, dass dies kein Zufall ist, sondern das für jeden solchen so konstruierten Baum gilt, dass die Summe der Informationsgehalten von Wurzel zu Knoten gleich ist.
 3. Sei ein Code $C = \{00000, 00001, 00010, 00110, 01000, 01001, 01110, 10010\}$ gegeben. Weiterhin haben Sie Zugriff auf ein Orakel, das Ihnen Fragen der Form „Ist das *i*-te Bit 1?“ beantwortet.
 - i) Wie viele Fragen müssen Sie *minimal* stellen, um ein beliebiges Wort von C eindeutig zu identifizieren?
 - ii) Entwickeln Sie eine Fragestrategie, die mit der Anzahl von Fragen auskommt, die Sie in der ersten Teilaufgabe ermittelt haben.

Besprechung in der Übung am 18. Mai 2017.