Hochschule RheinMain
Wintersemester 2012/13

FB Design Informatik Medien
Prof. Dr. Steffen Reith

Probeklausur zur Vorlesung

Diskrete Mathematik

Name:	______________	Vorname:	______________
Matrikelnummer:	______________	Unterschrift:	______________

Die folgende Tabelle ist **nicht** für Sie bestimmt, sondern für die Punkteverwaltung!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ
Erreichbare Punkte	8	6	10	10	4	7	8	45 (+ 8)
Erreichte Punkte								
Note								

- Die Dauer der Klausur beträgt **90 Minuten**.
- Es sind **keine** Hilfsmittel zugelassen. Entfernen Sie insbesondere Mobiltelefone, Vorlesungsmitschriften, lose Blätter und Bücher von Ihrem Tisch!
- Sollte es Unklarheiten mit den Aufgabenstellungen geben (z.B. aufgrund sprachlicher Probleme), dann können Sie während der Klausur **kurze** Fragen stellen.
- Die **Bindung** der Blätter dieser Klausur **darf nicht entfernt** werden!
- Aufgabe 7 ist eine **optionale** Zusatzaufgabe.
- Bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis auf den Tisch!
- Täuschungsversuche aller Art werden mit der **Note 5** geahndet! Beachten Sie, dass auch **elektronische Geräte** (z.B. Mobiltelefone) **unerlaubte Hilfsmittel** darstellen!
- Schreiben Sie bitte auf **jedes** Blatt Ihre Matrikelnummer!
- Jeder Lösungsweg muss klar ersichtlich sein. Algorithmen jeder Art sind zu **kommentieren**!
- Von der Vorlesung abweichende Notationen sind zu **definieren**!
- Am Ende finden Sie **drei leere Seiten** zur freien Verfügung. Sie können zusätzlich auch die **Rückseite** der Blätter benutzen, um Lösungen der Aufgaben darauf zu schreiben! Andere Papierbögen sind **nicht zulässig**!
- Nach der Korrektur Ihrer Klausur können Sie im Rahmen meiner **Sprechstunde** (oder nach Vereinbarung) in die Korrektur **Einsicht nehmen**.

Viel Erfolg!

Matrikelnummer: ________________________

Aufgabe 1 **Grundlagen** **(8 Punkte)**

a) Sei $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ ein beliebiger Körper, $a \in \mathbb{F}^*$ und $b \in \mathbb{F}$. Wir definieren $h\colon \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ mit

$$h(x) = a \cdot x + b$$

i) Zeigen Sie, dass die Funktion h bijektiv ist.

b) Sei $M = \{2, \ldots, 11\}$ und $R \subseteq M \times M$, wobei

$$R =_{\text{def}} \{(n, m) \in M \times M \mid n \text{ hat genauso viele Teiler wie } m\}$$

Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist und geben Sie die Äquivalenzklassen $[2]_R$ und $[6]_R$ an.

Matrikelnummer: ________________________

Aufgabe 2 **Zählen** **(6 Punkte)**

a) Sei M eine endliche Menge mit $\#M = n$ und sei $F =_{\text{def}} \{f \mid f\colon M \to M, f \text{ bijektiv}\}$. Geben Sie die Mächtigkeit von F an, und belegen Sie Ihre Aussage.

b) Die Kommision zur Verteilung der restlichen Studienmittel einer hessischen Fachhochschule besteht aus sieben Mitgliedern. Wie viele verschiedene Möglichkeiten (ausrechnen!) gibt es, eine Mehrheit zu bilden?

c) Wieviele verschiedene natürliche Zahlen in Hexadezimaldarstellung, die kleiner als 1000_{16} sind, enthalten die Ziffer 3 nicht?

Matrikelnummer: ________________________

Aufgabe 3 **Permutationen** **(10 Punkte)**

Sei $\pi \in S_n$ und die Operation $\circ$ die Komposition von Funktionen, dann definieren wir

$$\pi^a =_{\text{def}} \begin{cases} \underbrace{\pi \circ \pi \circ \cdots \circ \pi}_{a-\text{mal}} & \text{, falls } a > 0 \\ (\pi^a)^{-1} & \text{, falls } a < 0 \\ \text{id} & \text{, falls } a = 0 \end{cases}$$

und

$$\operatorname{sgn}(\pi) =_{\text{def}} \begin{cases} 1 & \text{, falls } \pi \text{ gerade} \\ -1 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Seien nun

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie π_1^5, π_2^4, sowie π_1^{-5} und π_2^{-2}.

b) Bestimmen Sie $\operatorname{sgn}(\pi_1)$ und $\operatorname{sgn}(\pi_2)$.

Matrikelnummer: ________________________

c) Zeigen Sie, dass für eine beliebige Permutation $\pi \in S_n$ der Zusammenhang $\operatorname{sgn}(\pi) = \operatorname{sgn}(\pi^{-1})$ gilt.

Aufgabe 4 **Gruppentheorie** **(8 Punkte)**

Sei die zyklische Gruppe $(\mathbb{Z}_n, +)$ mit $n \geq 2$ gegeben.

a) Finden Sie einen Generator z für $(\mathbb{Z}_n, +)$.

b) Sei nun $(G, \cdot)$ eine beliebige zyklische Gruppe der Ordnung n, d.h. es gibt ein $g \in G$, so dass $G = \{g^0, g^1, \ldots, g^{n-1}\}$. Geben Sie einen Isomorphismus $\eta \colon G \to \mathbb{Z}_n$ an.

Matrikelnummer: ________________________

Aufgabe 5 **Elementare Zahlentheorie** **(4 Punkte)**

a) Berechnen Sie den ggT und den kgV von 72 und 53.

b) Sei nun x eine Unbekannte. Bestimmen Sie eine Lösung für die Kongruenz $7x \equiv 3 \bmod 23$.

Aufgabe 6 **Asymptotische Notationen & Rekurrenzen** **(7 Punkte)**

a) Seien $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $O(g) = O(f)$. Gilt dann auch $g = f$? Ist dies der Fall, so beweisen Sie dies. Im anderen Fall geben Sie ein geeignetes Gegenbeispiel.

Matrikelnummer: ________________________

b) Sei die folgenden Rekurrenz $T\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeben:

$$\begin{aligned} T(0) &=_{\text{def}} 1 \\ T(n) &=_{\text{def}} T(n-1) + (2n+1) \end{aligned}$$

Geben Sie die Werte von $T(1)$, $T(2)$, $T(3)$ und $T(4)$ direkt an, und bestimmen Sie eine Funktion $f(n)$, die das Funktionensymbol T nicht enthält, so dass $T(n) = f(n)$ gilt.

Matrikelnummer: ________________________

Aufgabe 7 **Bonusaufgabe** **(8 Punkte)**

a) Finden Sie alle invertierbaren Elemente in den Restklassenringen $\mathbb{Z}_6$ und $\mathbb{Z}_8$.

b) Seien $\mathcal{G}_1 = (G_1, \circ_1)$ und $\mathcal{G}_2 = (G_2, \circ_2)$ Gruppen mit den neutralen Elementen e_1 bzw. e_2 und $\eta\colon G_1 \to G_2$ ein Homomorphismus. Wir definieren die binäre Relation Kern_η durch

$$\mathrm{Kern}_\eta = \{(a, b) \in G_1 \mid \eta(a) = \eta(b)\}$$

i) Zeigen Sie, dass Kern_η eine Äquivalenzrelation ist.

ii) Zeigen Sie, dass alle Elemente aus der Äquivalenzklasse $[e_1]_{\mathrm{Kern}_\eta}$ von η auf e_2 abgebildet werden.

c) Ein kommutativer Ring ohne Nullteiler heißt *Integritätsbereich*. Zeigen Sie, dass in jedem Integritätsbereich R die folgende Kürzungsregel gilt:

Wenn $a \neq 0_R$ und $a \cdot x = a \cdot y$, dann gilt $x = y$.

Matrikelnummer: ________________________

Notizen 1

Matrikelnummer: ________________________

Notizen 2

Matrikelnummer: ________________________

Notizen 3