Diskrete Mathematik
Wintersemester 2016/2017

Hochschule RheinMain
Prof. Dr. Steffen Reith

1. Übungsblatt

Definition 1: *Sei A eine beliebige Menge. Wir definieren die Diagnonale Δ_A von A wie folgt:*

$$\Delta_A =_{\text{def}} \{(a, a) \mid a \in A\}$$

Definition 2: *Seien A und B beliebige Mengen und $R \subseteq A \times B$ eine zweistellige Relation. Wir definieren die zu R inverse Relation R^{-1} wie folgt:*

$$R^{-1} =_{\text{def}} \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R\}$$

Definition 3: *Eine Partition $\mathcal{S}$ einer Menge S ist eine Menge von Teilmengen von S mit den folgenden Eigenschaften:*

- *Gilt $A \in \mathcal{S}$, dann gilt $A \neq \emptyset$. (Kein Element der Partition ist die leere Menge)*
- *$\bigcup_{A_i \in \mathcal{S}} A_i = S$ (die Vereinigung aller Elemente der Partition ergibt S)*
- *Für $A_1, A_2 \in \mathcal{S}$ gilt entweder $A_1 = A_2$ oder $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. (Zwei Elemente einer Partition sind gleich oder disjunkt)*

Lösen Sie die folgenden Aufgaben:

1. i) Sei R eine binäre Relation über A. Zeigen Sie, dass R genau dann reflexiv ist, wenn $\Delta_A \subseteq R$.
   ii) Sei R eine zweistellige Relation über A. Zeigen Sie, dass R genau dann symmetrisch ist, wenn $R^{-1} = R$.
   iii) Sei A eine nichtleere Menge. Jede Äquivalenzrelation $\sim$ über A legt eine Partition $\mathcal{Z}$ von A fest. Umgekehrt gilt auch, dass jede Partition eine Äquivalenzrelation über A bestimmt.
2. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\alpha \cdot \beta \neq 0$. Gegeben sei die folgende rekursiv definierte Folge von Zahlen

$$Q_n =_{\text{def}} \begin{cases} \alpha, & \text{wenn } n = 0 \\ \beta, & \text{wenn } n = 1 \\ \frac{1+Q_{n-1}}{Q_{n-2}}, & \text{wenn } n > 1 \end{cases}$$

   Geben Sie Q_n für alle $n \in \mathbb{N}$ explizit an!
3. Zeigen Sie, dass jede Teilmenge von $\mathbb{N}$ abzählbar ist.
4. Zeigen Sie, dass jede Teilmenge einer abzählbaren Menge wieder abzählbar ist.

Besprechnung in der Übung am 28.10.2016 in der KW43. Bereiten Sie die Aufgaben so vor, dass sie an der Tafel vorgeführt werden können.