Hochschule RheinMain
Prof. Dr. Steffen Reith

7. Übungsblatt

1. Sei $\mathcal{G} = (G, \cdot)$ eine beliebige Gruppe. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:
   i) Die Gruppe $\mathcal{G}$ hat *genau ein* neutrales Element.
   ii) Zu jedem Element $g \in G$ gibt es *genau ein* inverses Element.
   iii) Seien $a, b \in G$, dann gilt $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

2. Sei $\eta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $\eta(n) = \ln n$. Zeigen Sie, dass η zusammen mit geschickt gewählten Verknüpfungen für $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{R}$ ein Halbgruppenhomomorphismus ist. Welche historische Anwendung dieser Tatsache hatte eine große Bedeutung?
   Hinweis: Ein Halbgruppenhomomorphismus ist analog zum Begriff des Monoidhomomorphismus definiert, wobei die Regel für das neutrale Element entfällt.

3. Sei $Y^Y =_{\text{def}} \{f \mid f\colon Y \to Y \text{ und } f \text{ ist ein Monoidhomomorphismus}\}$ und $Y \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass Y^Y zusammen mit der Komposition von Funktionen ein Monoid bildet.

4. Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine beliebige (formale) Sprache über dem endlichen Alphabet Σ (d.h. eine Menge von Wörtern, die aus Buchstaben aus Σ gebildet werden können). Wir definierten die Relation $\sim_L$ wie folgt:

   Seien $x, y \in \Sigma^*$, dann gilt $x \sim_L y$ genau dann, wenn für alle $z \in \Sigma^*$ gilt $xz \in L$ gdw. $yz \in L$.

   Zeigen Sie, dass $\sim_L$ eine Äquivalenzrelation ist.

Besprechung in der Übung am 9. Dezember 2016.