

## 8. Übungsblatt

1. Sei  $M \neq \emptyset$  eine endliche Menge und  $S(M) =_{\text{def}} \{\pi: M \rightarrow M \mid \pi \text{ ist eine Permutation}\}$ . Zeigen Sie, dass  $(S(M), \circ)$  eine Gruppe ist, wenn „ $\circ$ “ die Komposition von Funktionen ist.
2. Geben Sie die Gruppentafel von  $S_3$  vollständig an und zeigen Sie, dass  $S_3$  nicht kommutativ ist.
3. Seien  $\mathcal{G} = (G, \oplus)$  und  $\mathcal{H} = (H, \otimes)$  Gruppen. Weiterhin ist ein Gruppenhomomorphismus  $\eta: G \rightarrow H$  gegeben. Zeigen Sie:
  - i) Wenn  $e_G$  das neutrale Element von  $\mathcal{G}$  und  $e_H$  das neutrale Element von  $\mathcal{H}$  ist, dann gilt  $\eta(e_G) = e_H$ .
  - ii) Sei  $a \in G$ , dann gilt  $\eta(a^{-1}) = (\eta(a))^{-1}$ .
  - iii) Ist die Gruppe  $\mathcal{G}$  kommutativ und  $\eta$  surjektiv, dann ist auch  $\mathcal{H}$  kommutativ.
4. Sei  $(G, \cdot)$  eine beliebige Gruppe und  $x \in G$ . Die Menge  $G_x =_{\text{def}} \{a \in G \mid a \cdot x \cdot a^{-1} = x\}$  heißt *Zentralisator* von  $x$ .
  - i) Kann  $G_x = \emptyset$  gelten? Begründen Sie Ihre Aussage!
  - ii) Zeigen Sie: Ist  $G$  abelsch, dann gilt  $G_x = G$  für jedes  $x \in G$ .
  - iii) Ist  $(G_x, \cdot)$  für alle  $x \in G$  eine Untergruppe von  $G$ ?

Besprechung in der Übung am 16.12.2016