Diskrete Mathematik
Wintersemester 2016/2017

Hochschule RheinMain
Prof. Dr. Steffen Reith

9. Übungsblatt

1. Zwei Zykel $f = (i_1, \dots, i_r)$ und $g = (j_1, \dots, j_s)$ heißen *disjunkt*, wenn $\{i_1, \dots, i_r\} \cap \{j_1, \dots, j_s\} = \emptyset$ gilt. Zeigen Sie, dass dann $fg = gf$ gilt.

2. Man berechne die Produkte $(1,2)(3,4,5)$, $(3,5)(4,1,2,3)(5,4,1)$, $(1,3,2)(2,4,6,8)$ und $(1,2)(4,5,6,3)(3,4)(5,6,3)$. Weiterhin bestimme man die Inversen von $(3,1,2)(4,6,5)$, $(1,3,2)(2,1,4,6)$, $(2,1)(2,3,4,1)$ und $(1,6,5)(4,3,2,6,1)$.

3. Gegeben seien die folgenden Permutationen:

   i) Gegeben sei
   $$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$
   Berechnen Sie π_1^2 und π_1^{-1}.

   ii) Berechnen Sie π_1^{11} und π_1^{14}, wenn $\pi^n =_{\text{def}} \underbrace{\pi \circ \cdots \circ \pi}_{n\text{-mal}}$ für eine beliebige Permutation π.

   iii) Sei $n \geq 2$, $(a, b) \in S_n$ eine beliebige Transposition. Schreiben Sie (a, b) mit Hilfe von maximal drei Transpositionen $t_1, t_2, t_3 \in S_n$ der Form $(1, i)$, wobei $i \in \{1, \dots, n\}$, so dass $t_1 \circ t_2 \circ t_3 = (a, b)$ gilt.

4. Sei $\mathcal{G} = (G, \cdot)$ eine Gruppe und $X \subseteq G$ eine nicht leere Menge. Wir definieren das *Erzeugnis* von X wie folgt:
   $$\langle X \rangle =_{\text{def}} \{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n | x_1, \dots, x_n \in X \cup X^{-1}, n \in \mathbb{N}\},$$
   wobei X^{-1} alle inversen Elemente von Elementen aus X enthält. Beweisen Sie mit der Definition des Erzeugnisses, dass $S_n = \langle \{\sigma \mid \sigma \text{ ist Transposition}\} \rangle$ gilt. Zeigen Sie weiterhin, dass sogar $S_n = \langle \{(1,2), (1,3), \dots (1,n)\} \rangle$.

5. Sei $\pi \in S_n$ für $n > 1$. Eine Permutation π heißt *gerade* genau dann, wenn sie sich als Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen schreiben läßt. Sonst heißt π ungerade. Zeigen Sie, dass die Menge $A_n =_{\text{def}} \{\pi \in S_n \mid \ \pi \text{ ist gerade}\}$ eine Untergruppe der S_n der Ordnung $\frac{1}{2}n!$ ist.

6. Sei $(G, \cdot)$ eine beliebige endliche Gruppe und $a \in G$. Wir definieren die Abbildung $\pi_a \colon G \to G$ mit $\pi_a(x) = a \cdot x$. Zeigen Sie, dass jede dieser Abbildung bijektiv ist. Zeigen Sie weiterhin, dass die Algebra $(\{\pi_a \mid a \in G\}, \circ)$ eine Gruppe bildet, wenn $\circ$ wieder die Komposition von Funktionen bezeichnet.

Besprechung in den Übungen am 10.1.2017 und 13.1.2017.