# 10. Übung

1. Sei $G$ eine Gruppe und $U$ eine Untergruppe von $G$. Wir definieren eine Relation $\sim \subseteq G \times G$ durch $a \sim b$ gdw. $ba^{-1} \in U$. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

2. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $U \subseteq G$. Zeigen Sie, dass $(U, \cdot)$ genau dann eine Untergruppe von $G$ ist, wenn für alle $u, v \in U$ auch $uv^{-1} \in U$ gilt.

3. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Zeigen Sie, dass alle Isomorphismen vom Typ $\eta\colon G \to G$ eine Gruppe bilden.

4. Gegeben sei die Gruppe $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ durch die folgende Gruppentafel:

   | $\cdot$ | 0 | 1 | 2 |
   |---|---|---|---|
   | 0 | 0 | 1 | 2 |
   | 1 | 1 | 2 | 0 |
   | 2 | 2 | 0 | 1 |

   Geben Sie konkret einen Homomorphismus $\eta\colon \mathbb{Z}_3 \to S_3$ an. Erstellen Sie dazu eine Gruppentafel der $S_3$ und „probieren“ Sie geeignet, um Werte für $\eta(0)$, $\eta(1)$ und $\eta(2)$ zu finden.

5. Seien $a, b, c, d$ und $e$ ganze Zahlen. Zeigen Sie:

   i) Aus $a \mid b$ folgt $ac \mid bc$ für alle $c$,

   ii) Aus $c \mid a$ und $c \mid b$ folgt $c \mid (da + fb)$ für alle $d$ und $f$,

   iii) Aus $a \mid b$ und $b \neq 0$ folgt $|a| \leq |b|$ und

   iv) Aus $a \mid b$ und $b \mid a$ folgt $|a| = |b|$.

   (Hinweis: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$, dann gilt $a \mid b$ gdw. es ein $c \in \mathbb{Z}$ mit $b = c \cdot a$ gibt.)

Besprechung in der Übung am 20.1.2017