Diskrete Mathematik
Wintersemester 2016/2017

Hochschule RheinMain
Prof. Dr. Steffen Reith

11. Übung

1. Sei G eine Gruppe und U eine Untergruppe von G. Wir definieren eine Relation $\sim \subseteq G \times G$ durch $a \sim b$ gdw. $ba^{-1} \in U$. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

2. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $U \subseteq G$. Zeigen Sie, dass $(U, \cdot)$ genau dann eine Untergruppe von G ist, wenn für alle $u, v \in U$ auch $uv^{-1} \in U$ gilt.

3. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Zeigen Sie, dass alle Isomorphismen vom Typ $\eta\colon G \to G$ eine Gruppe bilden.

4. Zeigen Sie die folgende Aussage: Eine Zahl n (in Dezimaldarstellung) ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist. Entwickeln Sie eine ähnliche Regel für die Teilbarkeit durch 11.

5. Zeigen Sie, dass sowohl die Addition von Restklassen „$\oplus$“ als auch die Multiplikation von Restklassen „$\odot$“ ist wohldefiniert, d.h. für $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$ und $a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$ gilt: Wenn $a \equiv a' \bmod m$ und $b \equiv b' \bmod m$, dann ist auch:

   - $[a]_{\equiv_m} \oplus [b]_{\equiv_m} = [a']_{\equiv_m} \oplus [b']_{\equiv_m}$ und
   - $[a]_{\equiv_m} \odot [b]_{\equiv_m} = [a']_{\equiv_m} \odot [b']_{\equiv_m}$.

Besprechung in der Übung am 27.1.2017