Diskrete Mathematik
Wintersemester 2017 / 2018

Hochschule RheinMain
Prof. Dr. Steffen Reith

4. Übungsblatt

1. Sei $\mathcal{G} = (G, \cdot)$ eine beliebige Gruppe. Zeigen Sie, dass für $a, b \in G$, die Gleichung $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ gilt.

2. Sei $(M, \cdot)$ ein Monoid und $M^* =_{\text{def}} \{m \in M \mid m \text{ ist invertierbar}\}$. Beweisen Sie, dass $(M^*, \cdot)$ eine Gruppe ist.

3. Sei $X^X =_{\text{def}} \{f \mid f\colon X \to X\}$ und $X \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass X^X zusammen mit der Komposition von Funktionen ein Monoid bildet.

4. Sei $T_n =_{\text{def}} \{p \mid p \text{ ist Teiler von } n\}$, $\mathrm{ggT}(a, b)$ ist der größte gemeinsame Teiler und $\mathrm{kgV}(a, b)$ das kleinste gemeinsame Vielfache von a und b. Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Algebra $(T_n, \{\mathrm{ggT}, \mathrm{kgV}\})$ ein Verband ist.
   Hinweis: Stellen Sie natürliche Zahlen als Produkt von Primzahlen dar und überlegen Sie sich eine alternative Bedeutung von ggT und kgV.

5. Seien $\mathcal{G} = (G, \oplus)$ und $\mathcal{H} = (H, \otimes)$ Gruppen. Weiterhin ist ein Gruppenhomomorphismus $\eta\colon G \to H$ gegeben. Zeigen Sie:

   i) Wenn e_G das neutrale Element von $\mathcal{G}$ und e_H das neutrale Element von $\mathcal{H}$ ist, dann gilt $\eta(e_G) = e_H$.

   ii) Sei $a \in G$, dann gilt $\eta(a^{-1}) = (\eta(a))^{-1}$.

   iii) Ist die Gruppe $\mathcal{G}$ kommutativ und η surjektiv, dann ist auch $\mathcal{H}$ kommutativ.

Besprechung in der Übung am 22. November 2017.