Hochschule RheinMain
Prof. Dr. Steffen Reith

6. Übungsblatt

1. Sei $(G, \cdot)$ eine beliebige Gruppe und $x \in G$. Die Menge $G_x =_{\text{def}} \{a \in G \mid a \cdot x \cdot a^{-1} = x\}$ heißt *Zentralisator* von x.

   i) Kann $G_x = \emptyset$ gelten? Begründen Sie Ihre Aussage!

   ii) Zeigen Sie: Ist G abelsch, dann gilt $G_x = G$ für jedes $x \in G$.

   iii) Ist $(G_x, \cdot)$ für alle $x \in G$ eine Untergruppe von G?

2. Zwei Zykel $f = (i_1, \ldots, i_r)$ und $g = (j_1, \ldots, j_s)$ heißen *disjunkt*, wenn $\{i_1, \ldots, i_r\} \cap \{j_1, \ldots, j_s\} = \emptyset$ gilt. Zeigen Sie, dass dann $fg = gf$ gilt.

3. Man berechne die Produkte $(1,2)(3,4,5)$, $(3,5)(4,1,2,3)(5,4,1)$, $(1,3,2)(2,4,6,8)$ und $(1,2)(4,5,6,3)(3,4)(5,6,3)$. Weiterhin bestimme man die Inversen von $(3,1,2)(4,6,5)$, $(1,3,2)(2,1,4,6)$, $(2,1)(2,3,4,1)$ und $(1,6,5)(4,3,2,6,1)$.

4. Gegeben seien die folgenden Permutationen:

   i) Gegeben sei
   $$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$
   Berechnen Sie π_1^2 und π_1^{-1}.

   ii) Berechnen Sie π_1^{11} und π_1^{14}, wenn $\pi^n =_{\text{def}} \underbrace{\pi \circ \cdots \circ \pi}_{n\text{-mal}}$ für eine beliebige Permutation π.

   iii) Sei $n \geq 2$, $(a, b) \in S_n$ eine beliebige Transposition. Schreiben Sie (a, b) mit Hilfe von maximal drei Transpositionen $t_1, t_2, t_3 \in S_n$ der Form $(1, i)$, wobei $i \in \{1, \ldots, n\}$, so dass $t_1 \circ t_2 \circ t_3 = (a, b)$ gilt.

Besprechung in der Übung am 6.12.2017