Hochschule RheinMain
Prof. Dr. Steffen Reith

# 7. Übungsblatt

1. Sei $\mathcal{G} = (G, \cdot)$ eine Gruppe und $X \subseteq G$ eine nicht leere Menge. Wir definieren das *Erzeugnis* von $X$ wie folgt:

$$\langle X \rangle =_{\text{def}} \{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n | x_1, \ldots, x_n \in X \cup X^{-1}, n \in \mathbb{N}\},$$

   wobei $X^{-1}$ alle inversen Elemente von Elementen aus $X$ enthält. Beweisen Sie mit der Definition des Erzeugnisses, dass $S_n = \langle \{\sigma \mid \sigma \text{ ist Transposition}\} \rangle$ gilt. Zeigen Sie weiterhin, dass sogar $S_n = \langle \{(1, 2), (1, 3), \ldots (1, n)\} \rangle$.

2. Sei $\pi \in S_n$ für $n > 1$. Eine Permutation $\pi$ heißt *gerade* genau dann, wenn sie sich als Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen schreiben läßt. Sonst heißt $\pi$ ungerade. Zeigen Sie, dass die Menge $A_n =_{\text{def}} \{\pi \in S_n \mid \pi \text{ ist gerade}\}$ eine Untergruppe der $S_n$ der Ordnung $\frac{1}{2}n!$ ist.

3. Sei $(G, \cdot)$ eine beliebige endliche Gruppe und $a \in G$. Wir definieren die Abbildung $\pi_a \colon G \to G$ mit $\pi_a(x) = a \cdot x$. Zeigen Sie, dass jede dieser Abbildung bijektiv ist. Zeigen Sie weiterhin, dass die Algebra $(\{\pi_a \mid a \in G\}, \circ)$ eine Gruppe bildet, wenn $\circ$ wieder die Komposition von Funktionen bezeichnet.

4. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Zeigen Sie, dass alle Isomorphismen vom Typ $\eta \colon G \to G$ eine Gruppe bilden.

Besprechung in der Übung am 13.12.2017.