Probeklausur zur Vorlesung

Automatentheorie & Formale Sprachen

10. Juli 2023

Name:	______________	Vorname:	______________
Matrikelnummer:	______________	Unterschrift:	______________

Die folgende Tabelle ist **nicht** für Sie bestimmt, sondern für die Punkteverwaltung!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Erreichbare Punkte	8	9	10	11	9	11	47 (+11)
Erreichte Punkte							

- Die Dauer der Klausur beträgt **90 Minuten**. Zum Bestehen benötigen Sie **50**% der Punkte.
- Sie dürfen an dieser Klausur nur teilnehmen, wenn Sie gesund und prüfungsfähig sind!
- Es sind **keine** Hilfsmittel zugelassen. Entfernen Sie insbesondere Smartphones, Vorlesungsmitschriften, lose Blätter und Bücher von Ihrem Tisch! Entfernen Sie Ihr Smartphone aus der Hosentasche und **schalten** Sie dieses **aus**!
- Sollte es Unklarheiten mit den Aufgabenstellungen geben (z.B. sprachlicher Probleme), dann können Sie **kurze** Fragen stellen. **Lesen** Sie die Aufgabenstellungen **vollständig**!
- Die **Bindung** der Blätter dieser Klausur **darf nicht entfernt** werden!
- Aufgabe 6 ist eine **optionale** Zusatzaufgabe.
- Bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis auf den Tisch!
- **Täuschungsversuche** werden mit der **Note 5** geahndet! Beachten Sie, dass auch **elektronische Geräte** (z.B. Mobiltelefone oder Smartwatches) **unerlaubte Hilfsmittel** darstellen!
- Bitte schreiben Sie **deutlich**. **Unleserliche** Lösungen werden **nicht gewertet**!
- Jeder Lösungsweg muss klar ersichtlich sein. Algorithmen jeder Art sind zu **kommentieren** und von der Vorlesung abweichende Notationen sind zu **definieren**!
- Am Ende finden Sie **drei leere Seiten** zur freien Verfügung. Sie können zusätzlich auch die **Rückseite** der Blätter benutzen, um Lösungen der Aufgaben darauf zu schreiben! Andere Papierbögen sind **nicht zulässig**!
- Nach der Korrektur Ihrer Klausur können Sie im Rahmen meiner **Sprechstunde** (oder nach Vereinbarung) in die Korrektur **Einsicht nehmen**.

Viel Erfolg!

Matrikelnummer: ________________________

Achten Sie in allen folgenden Aufgaben auf eine *richtige* und *ordentliche* mathematische Schreibweise (z.B. Mengenklammern). Falsche oder unklare Schreibweisen führen zu (evtl. vollständigen) Punktabzug!

Aufgabe 1 **Grundlagen** **(8 Punkte)**

Markieren Sie die folgenden Aussagen (Kästchen) mit **R** für *richtig* und mit **F** für *falsch*. Beachten Sie, dass *Kreuze* als Markierung unzulässig sind! Für unzulässige Markierungen gibt es keine Punkte!

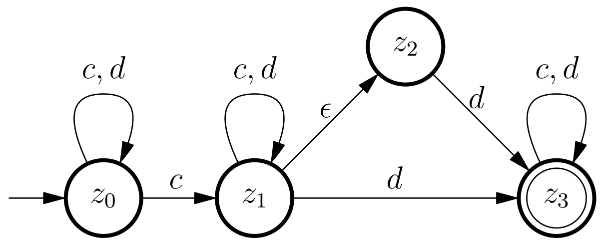
(Hinweis: Falsche Antworten ergeben keinen Abzug von Punkten!)

- ☐ Jede reguläre Sprache ist auch kontextfrei.
- ☐ Wenn ein NEA M n Zustände hat, dann kann bei der Potenzmengenkonstruktion ein DEA M' mit maximal 2^n Zuständen entstehen, wobei $L(M) = L(M')$ gilt.
- ☐ Die Grammatik $(\{0,1\}, \{S, A, B\}, \{S \to aA, A \to AB, B \to bB, B \to b\}, S)$ ist regulär.
- ☐ Die Sprache $a^n b^n c^n$ ist kontextfrei.
- ☐ Die Menge der Turingmaschinen ist abzählbar.
- ☐ Der CYK-Algorithmus löst das Wortproblem für Typ 2 Sprachen.
- ☐ Es gibt eine Typ 3 Sprache L, so dass für alle regulären Ausdrücke γ gilt $L(\gamma) \neq L$.
- ☐ Die Menge der regulären Sprachen ist unter Komplement, Schnitt und Vereinigung abgeschlossen.

Matrikelnummer: ________________________

Aufgabe 2 **Endliche Automaten** **(9 Punkte)**

Wir betrachten den nichtdeterministischen endlichen Automaten mit ϵ-Übergängen $M = (\{z_0, z_1, z_2, z_3\}, \{c, d\}, \delta, z_0, \{z_3\})$, wobei δ graphisch dargestellt ist:



1. Welche Sprache akzeptiert der Automat M? Begründen Sie Ihre Aussage.

2. Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, so dass $L(M) = L(R)$ gilt.

3. Konstruieren Sie mit der Potenzmengenkonstruktion einen deterministischen endlichen Automaten, der die gleiche Sprache akzeptiert. Und geben Sie diesen vollständig an und zeichnen Sie eine graphische Darstellung der Übergangsfunktion!

Matrikelnummer: ________________________

Aufgabe 3 **Pumping Lemma** **(10 Punkte)**

Sei $L \subseteq \{d, e\}^*$ eine Sprache deren Wörter die Form $d^{n_1}e^{n_2}$ mit $n_1 \geq 2n_2$ haben. Damit sind in jedem Wort aus L mindestens doppelt so viele d's wie e's enthalten. Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas, dass L nicht regulär ist.

Matrikelnummer: ________________________

Aufgabe 4 **Kontextfreie Sprachen** **(11 Punkte)**

Gegeben sei die Grammatik $G = (\{a, b, c, d\}, \{S, A, X\}, P, S)$, wobei

$$P = \{S \to aSd,\ S \to X,\ X \to bXc, X \to bc\}$$

1. Geben Sie die Produktionen einer äquivalenten Grammatik in Chomsky-Normalform mit Hilfe der in der Vorlesung eingeführten Methode an. Verwenden Sie dazu die neuen Nichtterminale D_α, wobei $\alpha \in \{a, b, c, d\}$ um Terminalsymbole zu ersetzen und R_i mit $i \in \{1, 2, 3, \dots\}$, wenn Regeln gekürzt werden müssen.

2. Ermitteln Sie, ob $abbcccd \in L(G)$ gilt. Begründen Sie Ihre Aussage!

Matrikelnummer: ______________________

3. Sei nun die kontextfreie Grammatik $G' = (\{a, b, c\}, \{S, X, A, B\}, \{S \to AS, A \to a, S \to BXB, X \to BXB, B \to b, X \to c\}, S)$ gegeben. Verwenden Sie den CYK-Algorithmus um zu überprüfen, ob das Wort *aabbcbb* in $L(G')$ enthalten ist.

   Hinweis: Sollten Sie G' verändern müssen, dann dürfen Sie hier nur genau ein neues Nichtterminal R verwenden! Benutzen Sie ggf. für die Grammatik den Platz neben der Tabelle.

Position i

	a	a	b	b			
Länge j							

Aufgabe 5 — Kontextfreie Sprachen — (9 Punkte)

1. Seien hier $n, m > 0$. Zeigen Sie, dass das die Sprachen $L_1 = a^n b^n c^m$ und $L_2 = a^m b^n c^n$ kontextfrei sind.

Matrikelnummer: ________________________

2. Beweisen Sie mit Hilfe der Sprachen L_1 und L_2, dass die Menge der kontextfreien Sprachen nicht unter Schnitt und Komplementbildung abgeschlossen sind.

Matrikelnummer: ________________________

Aufgabe 6 **Zusatzaufgabe** **(11 Punkte)**

1. Sei nun $\Sigma = \{0, 1\}$ das Bandalphabet einer Turingmaschine M, die die Funktion f berechnet. Dabei gilt $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ mit $f(a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n) = a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_1$, wobei $a_1, \ldots, a_n \in \Sigma$. Geben Sie die Turingmaschine *vollständig* an. Die Überführungsfunktion soll mit Hilfe der Tabelle festgelegt werden. Dabei soll $\sigma \in \{L, N, R\}$ gelten. Füllen Sie dazu die Kommentarspalte *jeder* Zeile aus.

   i) Die gesuchte Turingmaschine ist

      $M = ($

   ii) Geben Sie nun die Überführungsfunktion δ an:

Z	Σ	$\rightarrow$	Z	Σ	σ	Kommentar
z_0	0	$\rightarrow$	$z^{(0)}$	0	R	Merke führende 0 im Zustand
z_0	1	$\rightarrow$	$z^{(1)}$	1	R	Merke führende 1 im Zustand
		$\rightarrow$				
		$\rightarrow$				
		$\rightarrow$				
		$\rightarrow$				
		$\rightarrow$				
		$\rightarrow$				
		$\rightarrow$				
		$\rightarrow$				
		$\rightarrow$				
		$\rightarrow$				
		$\rightarrow$				
		$\rightarrow$				
		$\rightarrow$				
		$\rightarrow$				
		$\rightarrow$				

Hinweis: Eine Turingmaschine beginnt ganz links auf der Eingabe und stoppt ganz links auf der Ausgabe.

Matrikelnummer: ______________________

2. Sei $G = (\Sigma, N, P, S)$ eine beliebige Grammatik vom Typ 2. Beweisen Sie, dass eine Grammatik G' existiert, so dass $L(G) = L(G')$ und bei der das Startsymbol nicht mehr auf der rechten Seite einer Produktion auftritt.

3. Geben Sie die Übergangsfunktion eines Kellerautomaten M an, der die Sprache $L = a^n b^{2n}, n > 0$ akzeptiert. Füllen Sie dazu die folgende Tabelle aus:

Z	$\Sigma \cup \{\epsilon\}$	Γ	$\rightarrow$	Z	Γ^*	Kommentar
z_0	a	#	$\rightarrow$			Lese das erste a
			$\rightarrow$			
			$\rightarrow$			
			$\rightarrow$			
			$\rightarrow$			
			$\rightarrow$			
			$\rightarrow$			
			$\rightarrow$			
			$\rightarrow$			
			$\rightarrow$			

Hinweis: Die Kommentarspalte jeder von Ihnen angegeben Zeile ist auszufüllen! Die anderen Komponenten des Kellerautomaten müssen nicht angegeben werden.

Matrikelnummer: ________________________

Notizen 1

Matrikelnummer: __________________________

Notizen 2

Matrikelnummer: ______________________

Notizen 3