

8. Übungsblatt

Lösen Sie die folgenden Aufgaben:

1. Seien A und B beliebige Sprachen und $A \leq_m^P B$. Zeigen Sie, dass aus $B \in \text{NP}$ auch $A \in \text{NP}$ folgt. Zeigen Sie weiterhin, dass wenn $B \in \text{P}$ gilt, dann ist auch $A \in \text{P}$.
2. Sei $\text{co-NP} =_{\text{def}} \{L \mid \bar{L} \in \text{NP}\}$ (Die Komplexitätsklasse, die alle Komplementsprachen von NP enthält). Zeigen Sie, dass die Sprache von Paaren logisch äquivalenter Formeln

$$\text{EQ} =_{\text{def}} \{(H, H') \mid H \text{ und } H' \text{ sind aussagenlogische Formeln und } H \equiv H'\}$$

$\leq_m^P$ -vollständig für co-NP ist.

3. Nun betrachten wir den eingeschränkten Reduktionsbegriff $\leq_m^{\log}$. Dieser Reduktionsbegriff ist wie $\leq_m^P$ definiert, wobei die Reduktionsfunktion aber in deterministisch logarithmischen Raum berechenbar sein muss (statt in polynomieller Zeit). Sei nun

$$\text{REACH} =_{\text{def}} \{(G, s, t) \mid G \text{ ist ein gerichteter Graph mit einem Weg von } s \text{ nach } t\}$$

Zeigen Sie, dass $\text{REACH} \leq_m^{\log}$ -vollständig für NL ist. Welche Probleme treten auf, wenn man eine $\leq_m^P$ -Reduktion verwenden würde?

Hinweis: Betrachten Sie die Konfigurationen einer beliebigen deterministischen und logarithmisch platzbeschränkten TM als Knoten eines Graphen. Wie kann man Kanten in diesem Graphen bestimmen und wieviel Platz benötigt diese Berechnung?

4. Es sei Σ ein Alphabet. Beweisen Sie die folgende Aussage: Ist $\text{P} = \text{NP}$, so sind alle Sprachen über Σ , die in NP liegen, NP -vollständig bis auf $\emptyset$ und Σ^* .
5. Das Problem CLIQUE ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \text{CLIQUE} =_{\text{def}} \{ \langle G, k \rangle \mid G = (V, E) \text{ ist ein ungerichteter Graph} \\ \text{und es gibt ein } V' \subseteq V \text{ mit } \#V' \geq k \text{ und } V' \times V' \subseteq E. \} \end{aligned}$$

Ein ungerichteter Graph $G = (V', E')$ heißt genau dann Teilgraph eines ungerichteten Graphen $G = (V, E)$, wenn $V' \subseteq V$ und $E' = E \cap (V' \times V')$ gelten.

Von einem der letzten Übungsblätter kennen Sie den Begriff der Isomorphie für Graphen. Es sei

$$\begin{aligned} \text{SGI} =_{\text{def}} \{ \langle G, H \rangle \mid G \text{ und } H \text{ sind ungerichtete Graphen,} \\ \text{und } G \text{ besitzt einen Teilgraphen, der isomorph zu } H \text{ ist.} \} \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass $\text{SGI} \in \text{NP}$ und $\text{CLIQUE} \leq_m^P \text{SGI}$ gelten.

6. Es sei

$\text{DOUBLE-SAT} =_{\text{def}} \{ \langle \varphi \rangle \mid \varphi \text{ ist eine aussagenlogische Formel,} \\ \text{die mindestens zwei erfüllende Belegungen besitzt} \}.$

Zeigen Sie, dass DOUBLE-SAT NP-vollständig für $\leq_m^p$ -Reduktionen ist.

Besprechung in der Übung am 15. Juni 2017.