

1. Übungsblatt

Lösen Sie die folgenden Aufgaben:

1. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- | | |
|---|---|
| i) $2n \in \mathcal{O}(n)$ | a) $(2^n)^3 \in 2^{\mathcal{O}(n)}$ |
| ii) $n^2 \in \mathcal{O}(n)$ | b) $2n^3 \in 2^{\mathcal{O}(n)}$ |
| iii) $\log_2(n) \in \mathcal{O}(\log_k(n))$ für alle festen $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ | c) $\mathcal{O}(2^n) = \mathcal{O}(3^n)$ |
| iv) $n^2 \in \mathcal{O}(n \cdot \log(n))$ | d) $\mathcal{O}(2^{2n}) = \mathcal{O}(2^n)$ |
| v) $n \cdot \log_2(n) \in \mathcal{O}(n^2)$ | e) $\mathcal{O}(n^2) + \mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(n^2)$ |
| vi) $3^n \in 2^{\mathcal{O}(n)}$ | f) $\mathcal{O}(n) - \mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(0)$ |

Verwenden Sie die Tatsache, dass $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$, gdw. $c, n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\forall n \geq n_0$ gilt $f(n) \leq c \cdot g(n)$.

2. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- | | |
|--|---|
| i) $n \in o(2n)$ | a) $1 \in o(\frac{1}{n})$ |
| ii) $2n \in o(n^2)$ | b) $\log_2(n) \in o(n)$ |
| iii) $n^k \in o(2^n)$ für alle festen $k \in \mathbb{N}$ | c) $n^2 \in o(\log_2(n))$ |
| iv) $2^n \in o(3^n)$ | d) $o(g(n)) \subseteq \mathcal{O}(g(n))$ für alle Funktionen $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ |
| v) $1 \in o(n)$ | |

Verwenden Sie die Tatsache, dass $f \in o(g)$, gdw. $\forall c > 0 \exists n_0 \forall n > n_0$ so, dass $f(n) < c \cdot g(n)$.

3. Im folgenden betrachten wir die bekannte kontextfreie Sprache $A =_{\text{def}} \{0^i 1^i \mid i \geq 0\}$.

i) Zeigen Sie, dass A von einer 1-Band-Turingmaschine in Zeit $\mathcal{O}(n \cdot \log(n))$ entschieden werden kann.

Beschreiben Sie hierzu die Funktionsweise der Turingmaschine vollständig und begründen Sie die Laufzeit der Maschine.

ii) Zeigen Sie, dass A mit $\mathcal{O}(\log(n))$ Bandzellen von einer Turingmaschine mit zwei Bändern entschieden werden kann, wenn man die von der Eingabe benutzten Bandzellen nicht zählt.

Beschreiben Sie hierzu die Funktionsweise der Turingmaschine vollständig und begründen Sie den Platzbedarf der Maschine.

Besprechung in der Übung am 7. Mai 2021. Achten Sie bitte auf einen korrekten mathematischen Formalismus!