6. Übungsblatt

Lösen Sie die folgenden Aufgaben:

1. Zwei ungerichtete Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ heißen zueinander *isomorph*, wenn die Knoten von G_1 so umbenannt werden können, dass G_2 entsteht.

   Formal bedeutet dies: G_1 und G_2 heißen genau dann zueinander isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung $f\colon V_1 \to V_2$ gibt, so dass für alle $u, v \in V_1$ gilt

   $$(u, v) \in E_1 \text{ gdw. } (f(u), f(v)) \in E_2.$$

   Es sei

   $$\mathrm{GI} =_{\text{def}} \{\langle G, H\rangle \mid G \text{ und } H \text{ sind zueinander isomorphe ungerichtete Graphen}\}.$$

   Zeigen Sie, dass $\mathrm{GI} \in \mathbf{NP}$ gilt.

2. Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt *k-färbbar* für $k \in \mathbb{N}$, falls seine Knoten so mit k zur Verfügung stehenden Farben markiert werden können, dass keine benachbarten Knoten dieselbe Farbe tragen. Formal definiert bedeutet das: Für $k \in \mathbb{N}$ heißt G genau dann k-färbbar, wenn es eine totale Abbildung $f\colon V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ gibt mit $f(u) \neq f(v)$ für alle $(u, v) \in E$.

   Es sei

   $$\text{COLORABILITY} =_{\text{def}} \{\langle G, k\rangle \mid k \in \mathbb{N} \text{ und } G \text{ ist ein } k\text{-färbbarer ungerichteter Graph}\}.$$

   Zeigen Sie, dass COLORABILITY $\in \mathbf{NP}$ gilt. Nun sei

   $$\text{2-COLORABILITY} =_{\text{def}} \{\langle G, k\rangle \mid k \in \mathbb{N} \text{ und } G \text{ ist ein 2-färbbarer ungerichteter Graph}\}.$$

   Zeigen Sie, dass 2-COLORABILITY $\in \mathbf{P}$.

Besprechung in der Übung am 18. Juni 2021. Achten Sie insbesondere auf einen korrekten mathematischen Formalismus!