Hochschule RheinMain (FB DCSM)
Prof. Dr. Steffen Reith

8. Übungsblatt

Lösen Sie die folgenden Aufgaben:

1. Sei **co-NP** $=_{\text{def}} \{L \mid \overline{L} \in \mathbf{NP}\}$ (Die Komplexitätsklasse, die alle Komplementsprachen von **NP** enthält). Zeigen Sie, dass die Sprache von Paaren logisch äquivalenter Formeln

   $$\text{EQ} =_{\text{def}} \{(H, H') \mid H \text{ und } H' \text{ sind aussagenlogische Formeln und } H \equiv H'\}$$

   $\leq_{\text{m}}^{\text{p}}$-vollständig für **co-NP** ist.

2. Nun betrachten wir den eingeschränkten Reduktionsbegriff $\leq_{\text{m}}^{\log}$. Dieser Reduktionsbegriff ist wie $\leq_{\text{m}}^{\text{p}}$ definiert, wobei die Reduktionsfunktion aber in deterministisch logarithmischen Raum berechenbar sein muss (statt in polynomieller Zeit). Sei nun

   $$\text{REACH} =_{\text{def}} \{(G, s, t) \mid G \text{ ist ein gerichteter Graph mit einem Weg von } s \text{ nach } t\}$$

   Zeiten Sie, dass REACH $\leq_{\text{m}}^{\log}$-vollständig für **NL** ist. Welche Probleme treten auf, wenn man eine $\leq_{\text{m}}^{\text{p}}$-Reduktion verwenden würde?
   Hinweis: Betrachten Sie die Konfigurationen einer beliebigen deterministischen und logarithmisch platzbeschränkten TM als Knoten eines Graphen. Wie kann man Kanten in diesem Graphen bestimmen und wieviel Platz benötigt diese Berechnung?

3. Es sei Σ ein Alphabet. Beweisen Sie die folgende Aussage: Ist $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, so sind alle Sprachen über Σ, die in **NP** liegen, **NP**-vollständig bis auf $\emptyset$ und $\Sigma^\star$.

4. Das Problem CLIQUE ist wie folgt definiert:

   $$\begin{aligned}\text{CLIQUE} =_{\text{def}} \{\langle G, k\rangle \mid\ & G = (V, E) \text{ ist ein ungerichteter Graph} \\ & \text{und es gibt ein } V' \subseteq V \text{ mit } \#V' \geq k \text{ und } V' \times V' \subseteq E.\}\end{aligned}$$

   Ein ungerichteter Graph $G = (V', E')$ heißt genau dann Teilgraph eines ungerichteten Graphen $G = (V, E)$, wenn $V' \subseteq V$ und $E' = E \cap (V' \times V')$ gelten.

   Von einem der letzten Übungsblätter kennen Sie den Begriff der Isomorphie für Graphen.

   Es sei

   $$\begin{aligned}\text{SGI} =_{\text{def}} \{\langle G, H\rangle \mid\ & G \text{ und } H \text{ sind ungerichtete Graphen,} \\ & \text{und } G \text{ besitzt einen Teilgraphen, der isomorph zu } H \text{ ist.}\}\end{aligned}$$

   Beweisen Sie, dass SGI $\in$ **NP** und CLIQUE $\leq_m^p$ SGI gelten.

5. Es sei

   $$\begin{aligned}\text{DOUBLE-SAT} =_{\text{def}} \{\langle\varphi\rangle \mid\ & \varphi \text{ ist eine aussagenlogische Formel,} \\ & \text{die mindestens zwei erfüllende Belegungen besitzt}\}.\end{aligned}$$

   Zeigen Sie, dass DOUBLE-SAT **NP**-vollständig für $\leq_m^p$-Reduktionen ist.

Besprechung in der Übung am 2. Juli 2021 in der 26. Kalenderwoche. Achten Sie insbesondere auf einen korrekten mathematischen Formalismus!