

7. Übungsblatt

Lösen Sie bitte die folgenden Aufgaben:

1. Zwei ungerichtete Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ heißen zueinander *isomorph*, wenn die Knoten von G_1 so umbenannt werden können, dass G_2 entsteht.

Formal bedeutet dies: G_1 und G_2 heißen genau dann zueinander isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung $\pi : V_1 \rightarrow V_2$ gibt, so dass für alle $u, v \in V_1$ gilt

$$(u, v) \in E_1 \text{ gdw. } (\pi(u), \pi(v)) \in E_2$$

Es sei

$$\text{GI} =_{\text{def}} \{ \langle G, H \rangle \mid G \text{ und } H \text{ sind zueinander isomorphe ungerichtete Graphen} \}.$$

Zeigen Sie, dass $\text{GI} \in \mathbf{NP}$ gilt.

2. Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt *k-färbbar*, für $k \in \mathbb{N}$, falls seine Knoten so mit k zur Verfügung stehenden Farben markiert werden können, dass keine benachbarten Knoten dieselbe Farbe tragen. Formal definiert bedeutet dies: Für $k \in \mathbb{N}$ heißt G genau dann *k-färbbar*, wenn es eine totale Abbildung $f : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ gibt mit $f(u) \neq f(v)$ für alle $(u, v) \in E$.

Es sei

$$k\text{-COL} =_{\text{def}} \{ \langle G, k \rangle \mid k \in \mathbb{N} \text{ und } G \text{ ist ein } k\text{-färbbarer ungerichteter Graph} \}.$$

Zeigen Sie, dass $k\text{-COL} \in \mathbf{NP}$ gilt. Nun sei

$$2\text{-COL} =_{\text{def}} \{ \langle G, k \rangle \mid k \in \mathbb{N} \text{ und } G \text{ ist ein 2-färbbarer ungerichteter Graph} \}.$$

Zeigen Sie, dass $k\text{-COL} \in \mathbf{P}$ gilt.

3. Wir definieren folgendes Problem:

$$\text{SOS} =_{\text{def}} \left\{ \langle \{x_1, \dots, x_n\}, t \rangle \mid x_1, \dots, x_n, t \in \mathbb{N} \text{ und es ex. } l \in \mathbb{N} \text{ so, dass} \right. \\ \left. \{y_1, \dots, y_l\} \subseteq \{x_1, \dots, x_n\} \text{ und } \sum_{i=1}^l y_i = t \right\}$$

Dieses Problem ist als „Sum of Subset“ bekannt. Zeigen Sie, dass SOS in \mathbf{NP} liegt, indem Sie einen geeigneten Verifier angeben.

Besprechung in der Übung am 19.6.2026. Achten Sie insbesondere auf einen korrekten mathematischen Formalismus!