

## 8. Übungsblatt

Lösen Sie bitte die folgenden Aufgaben:

1. Sei  $\mathbf{co-NP} =_{\text{def}} \{L \mid \bar{L} \in \mathbf{NP}\}$  (Die Komplexitätsklasse, die alle Komplementsprachen von  $\mathbf{NP}$  enthält). Zeigen Sie, dass die Sprache von Paaren logisch äquivalenter Formeln

$$\text{EQ} =_{\text{def}} \{(H, H') \mid H \text{ und } H' \text{ sind aussagenlogische Formeln und } H \equiv H'\}$$

$\leq_m^p$ -vollständig für  $\mathbf{co-NP}$ , wobei

$$\text{SAT} =_{\text{def}} \{H \mid H \text{ ist eine erfüllbare aussagenlogische Formel}\}.$$

Hinweis:  $\overline{\text{SAT}}$  ist  $\mathbf{co-NP}$ -vollständig.

2. Nun betrachten wir den eingeschränkten (im Vergleich zu  $\leq_m^p$ ) Reduktionsbegriff  $\leq_m^{\log}$ . Dieser Reduktionsbegriff ist wie  $\leq_m^p$  definiert, wobei die Reduktionsfunktion aber im deterministisch logarithmischen Raum berechenbar sein muss (statt in polynomieller Zeit). Sei nun

$$\text{REACH} =_{\text{def}} \{(G, s, t) \mid G \text{ ist ein gerichteter Graph mit einem Weg von } s \text{ nach } t\}.$$

Zeigen Sie, dass  $\text{REACH}$   $\leq_m^{\log}$ -vollständig für  $\mathbf{NL}$  ist. Welche Probleme treten auf, wenn man  $\leq_m^p$  Reduktion verwenden würde?

Hinweis: Betrachten Sie die Konfigurationen einer beliebigen deterministischen und logarithmisch platzbeschränkten TM als Knoten eines Graphen. Wie kann man Kanten in diesem Graphen bestimmen und wie viel Platz benötigt diese Berechnung?

3. Sei  $\Sigma$  ein Alphabet. Beweisen Sie die folgende Aussage: Ist  $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ , so sind alle Sprachen über  $\Sigma$ , die in  $\mathbf{NP}$  liegen,  $\mathbf{NP}$ -vollständig bis auf  $\emptyset$  und  $\Sigma^*$ .

Besprechung in der Übung am 26.6.2026. Achten Sie insbesondere auf einen korrekten mathematischen Formalismus!