1. Übungsblatt

1. Beweisen Sie die folgende Aussage:

   Satz 1: *Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl, dann existieren genau 2^{2^n} verschiedene n-stellige Boolesche Funktionen.*

   Versuchen Sie einen formalen Beweis zu finden. Einfache Argumente reichen nicht! Verallgemeinern Sie Ergebnis auf Funktionen der Form $f\colon \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}^n \to \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ (eine Variable kann nicht zwei, sondern k Werte annehmen).

2. Finden Sie eine möglichst kurze Formel $H(x_1, \ldots, x_3)$, die die drei Aussagenvariablen x_1, x_2 und x_3 enthält, mit der folgenden Eigenschaft: Für jede Belegung $I\colon \{x_1, x_2, x_3\} \to \{0, 1\}$ gilt, dass das Ändern **genau eines** der Werte $I(x_1)$, $I(x_2)$ oder $I(x_3)$ auch $I(H)$ ändert.

   Finden Sie auch eine Verallgemeinerung für alle $n > 0$.

   Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Spezialfall $n = 2$.

3. Wir definieren $H_1, \ldots, H_n$ durch

$$\bigwedge_{i=1}^{n} H_i =_{\text{def}} ((\ldots((H_1 \wedge H_2) \wedge H_3) \wedge \cdots \wedge H_{n-1}) \wedge H_n)$$

$$\bigvee_{i=1}^{n} H_i =_{\text{def}} ((\ldots((H_1 \vee H_2) \vee H_3) \vee \cdots \vee H_{n-1}) \vee H_n)$$

$$\bigoplus_{i=1}^{n} H_i =_{\text{def}} ((\ldots((H_1 \oplus H_2) \oplus H_3) \oplus \cdots \oplus H_{n-1}) \oplus H_n)$$

   Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

   i) $I(\bigwedge_{i=1}^{n} H_i) = 1$ gdw. $I(H_i) = 1$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt.
   ii) $I(\bigvee_{i=1}^{n} H_i) = 1$ gdw. ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $I(H_i) = 1$ existiert.
   iii) $\bigoplus_{i=1}^{n} x_i$ hat genau 2^{n-1} erfüllende Belegungen. Beachten Sie, dass mit x_i Aussagenvariablen bezeichnet werden.

Besprechung am 2. November 2022.