2. Übungsblatt

1. Zeigen Sie, dass die Negation einer Tautologie unerfüllbar ist.

2. Zeigen Sie die folgenden Äquivalenzen durch Aufstellen von Wahrheitswertetabellen:

   i) $(H_1 \wedge (H_2 \vee H_3)) \equiv ((H_1 \wedge H_2) \vee (H_1 \wedge H_3))$

   ii) $\neg(H_1 \vee H_2) \equiv (\neg H_1 \wedge \neg H_2)$

   iii) Zeigen Sie die Richtigkeit der Äquivalenz $\neg(H_1 \wedge H_2) \equiv (\neg H_1 \vee \neg H_2)$ auch durch Angabe geeigneter Venn-Diagramme.

3. Zeigen Sie, dass jede aussagenlogische Formel zu unendlich vielen anderen Formeln logisch äquivalent ist.

4. Der Fachbereichsrat einer hessischen Informatikfakultät beschloss eine neue Prüfungsordnung, in der auch die erlaubten Fächerkombinationen geregelt sind. Zur Auswahl stehen die Fächer *Theologik*, *Praxologie* und *Schaltkreislöten*, sowie ein *Äppelwoipraktikum*. Es wurde festgelegt, dass eine gültige Fächerkombination alle folgenden Bedingungen erfüllen muss:

   i) Wurde das Äppelwoipraktikum nicht erfolgreich absolviert, so muss die Praxologieprüfung bestanden werden.

   ii) War ein Student in der Praxologie- oder Schaltkreisprüfung nicht erfolgreich, so müssen die Theologik und das Äppelwoipraktikum bestanden werden.

   iii) Hat ein Kandidat weder die Prüfung in Theologik noch in Praxologie bestanden, so muss die Schaltkreisvorlesung und das Äppelwoipraktikum bestanden werden.

   Obwohl diese Prüfungsordnung das Ergebnis eines sehr schwierigen Abstimmungsprozesses war, lehnte das Ministerium die Prüfungsordnung wegen „undurchsichtigen Formulierungen“ ab. Die Fakultät wurde aufgefordert, die Prüfungsbedingungen äquivalent so umzuformen, dass möglichst wenige, einfache Alternativen entstehen.

Helfen Sie dem Studiendekan bei dieser schweren Arbeit, indem Sie die Prüfungsordnung formalisieren und dann sinnvoll mit den Regeln aus Satz 1 umformen und vereinfachen.

Besprechung in den Übungen am 9. November 2022

Bonusaufgabe:

Eine Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ von natürlichen Zahlen wird für $k \geq 1$ rekursiv wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_{k+1} &= a_k + 8k \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $a_n = (2n-1)^2$ für $n \geq 1$ gilt.

Es gelten die folgenden Äquivalenzen:

Satz 1: *Es gelten die folgenden Äquivalenzen:*

$$
\begin{array}{rcll}
H_1 \wedge H_2 & \equiv & H_2 \wedge H_1 & \textit{Kommutativgesetz} \\
H_1 \vee H_2 & \equiv & H_2 \vee H_1 & \textit{Kommutativgesetz} \\
H_1 \wedge (H_2 \wedge H_3) & \equiv & (H_1 \wedge H_2) \wedge H_3 & \textit{Assoziativitätsgesetz} \\
H_1 \vee (H_2 \vee H_3) & \equiv & (H_1 \vee H_2) \vee H_3 & \textit{Assoziativitätsgesetz} \\
H_1 \wedge (H_2 \vee H_3) & \equiv & (H_1 \wedge H_2) \vee (H_1 \wedge H_3) & \textit{Distributivgesetz} \\
H_1 \vee (H_2 \wedge H_3) & \equiv & (H_1 \vee H_2) \wedge (H_1 \vee H_3) & \textit{Distributivgesetz} \\
H_1 \vee H_1 & \equiv & H_1 & \textit{Duplizitätsgesetz} \\
H_1 \wedge H_1 & \equiv & H_1 & \textit{Duplizitätsgesetz} \\
H_1 \wedge (H_1 \vee H_2) & \equiv & H_1 & \textit{Absorptionsgesetz} \\
H_1 \vee (H_1 \wedge H_2) & \equiv & H_1 & \textit{Absorptionsgesetz} \\
\neg(H_1 \wedge H_2) & \equiv & \neg H_1 \vee \neg H_2 & \textit{de-Morgansche Regel} \\
\neg(H_1 \vee H_2) & \equiv & \neg H_1 \wedge \neg H_2 & \textit{de-Morgansche Regel} \\
\neg\neg H & \equiv & H & \textit{doppelte Verneinung} \\
H_1 \to H_2 & \equiv & \neg H_1 \vee H_2 & \textit{Auflösung der Implikation} \\
H_1 \leftrightarrow H_2 & \equiv & ((H_1 \wedge H_2) \vee (\neg H_1 \wedge \neg H_2)) & \textit{Auflösung der Äquivalenz} \\
H_1 \to H_2 & \equiv & \neg H_2 \to \neg H_1 & \textit{Kontraposition}
\end{array}
$$