Logik und Berechenbarkeit
Wintersemester 2022 / 2023

Hochschule RheinMain
Steffen Reith

5. Übungsblatt

1. Es sei

$$H_n(x_1,\dots,x_n) =_{\text{def}} (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_3 \vee \neg x_4) \wedge \dots \wedge (x_{n-1} \vee \neg x_n) \wedge (x_n \vee \neg x_1)$$

   i) Bestimmen Sie $\text{Res}_*(H) =_{\text{def}} \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \text{Res}_i(H)$.
   ii) Geben Sie alle Belegungen der Variablen $x_1,\dots,x_n$ an, die H_n erfüllen.

2. Es sei $H(x_1,\dots,x_n)$ eine KNF-Formel mit höchstens zwei Literalen in jeder Klausel.
   i) Geben Sie ein (möglichst) kleines $m \geq 0$ mit $\text{Res}_m(H) = \text{Res}_*(H)$.
   ii) Welche Rechenzeit wird benötigt, um $\text{Res}_*(H)$ zu berechnen? (Geben Sie die Laufzeit in Abhängigkeit von der Anzahl der Variablen an.)

3. Ist für eine Hornformel H die Formel $\text{Res}_*(H)$ stets auch eine Hornformel?

4. Zeigen Sie unter Verwendung der Resolutionsmethode, dass es sich bei der Formel

$$H(x,y,z) = (((((\neg x \wedge \neg y) \wedge z) \vee (\neg x \wedge \neg z)) \vee (y \wedge z)) \vee x)$$

   um eine Tautologie handelt.

Besprechung in der Übung am 30. November 2022

Bonus: Sei die Fibonacci-Folge durch $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2$ gegeben. Sei nun $\Phi =_{\text{def}} \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\Psi =_{\text{def}} 1 - \Phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\Phi^{-1}$. Zeigen Sie durch Induktion

$$F_n = \frac{\Phi^n - \Psi^n}{\sqrt{5}}$$