Hochschule RheinMain
Prof. Dr. Steffen Reith

# 8. Übungsblatt

**Definition 1:** *Sei* $\Phi \subseteq L_{\mathrm{AL}}$*, dann heißt* $\Phi$ konsistent *(*widerspruchsfrei*) gdw. es keine Formel* $H \in L_{\mathrm{AL}}$ *mit* $H, \neg H \in \Phi^{\vdash}$ *gibt.*

**Definition 2:** *Sei* $\Phi \subseteq L_{\mathrm{AL}}$*, dann heißt* $\Phi$ vollständig *gdw. für jedes* $H \in L_{\mathrm{AL}}$ *gilt* $H \in \Phi$ *oder* $\neg H \in \Phi$*.*

Lösen Sie die folgenden Aufgaben:

1. Zeigen Sie mit Hilfe der Ableitungsregeln $\{H\}^{\vdash} = \{(H \vee H)\}^{\vdash}$.

   Hinweis: Verwenden Sie für die Richtung „$\subseteq$“ von Teilaufgabe *ii*) den „Modus Ponens“ und die Regel von der Fallunterscheidung.

2. Sei $\Phi \subseteq L_{\mathrm{AL}}$ und $H \in L_{\mathrm{AL}}$. Zeigen Sie, die Richtigkeit der folgenden Aussage: Wenn $\Phi$ konsistent und $H$ unerfüllbar ist, dann gilt $H \notin \Phi$.

   Hinweis: Verwenden Sie $\emptyset \models \mathrm{TAUT}$ und den Korrektheitssatz.

3. Welche der folgenden Menge sind vollständig und welche sind konsistent?

   *i*) $\mathrm{TAUT} =_{\mathrm{def}} \{H \mid H \text{ ist eine Tautologie}\}$
   *ii*) $\mathrm{SAT} =_{\mathrm{def}} \{H \mid H \text{ ist erfüllbar}\}$
   *iii*) $\mathrm{ONEREP} =_{\mathrm{def}} \{H \mid f_H(1, 1, \ldots, 1) = 1\}$

Besprechung in der Übung am 18. Januar 2023.

Zusatzübung:

I) Seien $n > 0$ eine natürliche Zahl und $H, H_i \in L_{\mathrm{AL}}$ für $1 \leq i \leq n$. Zeigen Sie durch eine vollständige Induktion die Korrektheit der folgenden Äquivalenz:

$$H \wedge \bigoplus_{i=1}^{n} H_i \equiv \bigoplus_{i=1}^{n} (H \wedge H_i)$$

II) Sei $\Phi = \{(x_1 \wedge x_2) \rightarrow x_3, x_4, \neg x_3\}$ eine Menge von Formeln. Geben Sie alle Modelle von $\Phi$ an.

III) Was versteht man unter dem „Endlichkeitssatz“. Geben Sie eine kurze Erläuterung der relevanten Begriffe.

IV) Zeigen Sie, dass $(H' \vee H) \in \{H, H \rightarrow H'\}^{\vdash}$. Geben Sie dazu alle Ableitungsschritte mit ihrer Bezeichnung an.