Logik und Berechenbarkeit
Wintersemester 2022 / 2023

Hochschule RheinMain
Prof. Dr. Steffen Reith

9. Übungsblatt

Zunächst als Erinnerung einige bekannte Definitionen:

Definition 1:

- *In der Formel* $\forall x H$ *(bzw.* $\exists x H$*) heißt* H *der* Wirkungsbereich *des Quantors* $\forall x$ *(bzw.* $\exists x$*).*
- *Die Variable* x *kommt in* H gebunden *vor, wenn* $\forall x$ *oder* $\exists x$ *in* H *vorkommt und* x *im Wirkungsbereich eines solchen Quantors liegt.*
- *Die Variable* x *kommt in* H frei *vor, wenn* x *in* H *an einer Stelle vorkommt, die nicht zum Wirkungsbereich eines Quantors* $\forall x$ *bzw.* $\exists x$ *gehört.*
- $\mathrm{frei}(H) =_{\mathrm{def}} \{x \mid x \textit{ kommt in } H \textit{ frei vor}\}$
- $\mathrm{gebunden}(H) =_{\mathrm{def}} \{x \mid x \textit{ kommt in } H \textit{ gebunden vor}\}$

Beispiel 2:

- *In* $(((y+1) = x) \to \exists z(z+1 = y))$ *kommen* x *und* y *frei und* z *gebunden vor.*
- *In* $((x = 0) \vee \exists x(x + x = x + 1))$ *kommt* x *frei und gebunden vor.*

Lösen Sie die folgenden Aufgaben:

1. Zeigen Sie, dass $\{\neg\neg H\} \vdash H$ und $\{H\} \vdash \neg\neg H$ gilt.
2. Beweisen Sie die Aussagen *ii*) - *iv*) des folgenden Satzes aus der Vorlesung:

   Satz 3: *Sei* $\Phi \subseteq L_{\mathrm{AL}}$ *konsistent und vollständig, dann gelten die folgenden Aussagen:*

   ii) $\neg H \in \Phi$ *gdw.* $H \notin \Phi$
   iii) $(H_1 \vee H_2) \in \Phi$ *gdw.* $H_1 \in \Phi$ *oder* $H_2 \in \Phi$
   iv) $(H_1 \wedge H_2) \in \Phi$ *gdw.* $H_1 \in \Phi$ *und* $H_2 \in \Phi$

3. Definieren Sie die Mengen $\mathrm{frei}(H)$ und $\mathrm{gebunden}(H)$ auf eine andere Weise, nämlich induktiv über den Aufbau der Formeln. Beginnen Sie Ihre Definitionen von $\mathrm{frei}(H)$ und $\mathrm{gebunden}(H)$ für Terme.
4. Ein Keller (engl. stack) ist eine bekannte Datenstruktur. Sei die Signatur $S = \{\mathrm{IsEmpty}, \mathrm{nullstack}, \mathrm{top}, \mathrm{push}, \mathrm{pop}\}$. Dabei ist IsEmpty ein einstelliges Prädikat, nullstack eine Konstante, top und pop einstellige Funktionen und push eine zweistellige Funktion.

   Man beschreibe die Operationen, die auf einem Keller erlaubt sind, durch eine Formel $F \in L^S$, sodass jedes Modell I von F ein (abstrakter) Keller ist.

Hinweis: Ein Bestandteil der Formel könnte z.B.

$$\forall x \forall y (\mathrm{top}(\mathrm{push}(x, y)) = y)$$

sein. Welche Vor- und Nachteile hat solch eine formale Spezifikation eines Stacks?

Besprechung in der Übung am 25. Januar 2023.