8. Übungsblatt

Definition 1: *Sei $\Phi \subseteq L_{\mathrm{AL}}$, dann heißt Φ* konsistent *(*widerspruchsfrei*) gdw. es keine Formel $H \in L_{\mathrm{AL}}$ mit $H, \neg H \in \Phi^{\vdash}$ gibt.*

Definition 2: *Sei $\Phi \subseteq L_{\mathrm{AL}}$, dann heißt Φ* vollständig *gdw. für jedes $H \in L_{\mathrm{AL}}$ gilt $H \in \Phi$ oder $\neg H \in \Phi$.*

Lösen Sie die folgenden Aufgaben:

1. Beweisen Sie, dass der Ableitungssoperator $\vdash$ ein Hüllenoperator ist.
2. Zeigen Sie mit Hilfe der Ableitungsregeln

   i) $\{H\}^{\vdash} = \{(H \wedge H)\}^{\vdash}$ und
   ii) $\{H\}^{\vdash} = \{(H \vee H)\}^{\vdash}$ gilt.

   Hinweis: Verwenden Sie für die Richtung „$\subseteq$“ von Teilaufgabe *ii)* den „Modus Ponens“ und die Regel von der Fallunterscheidung.
3. Sei $\Phi \subseteq L_{\mathrm{AL}}$ und $H \in L_{\mathrm{AL}}$. Zeigen Sie, die Richtigkeit der folgenden Aussage: Wenn Φ konsistent und H unerfüllbar ist, dann gilt $H \notin \Phi$.

   Hinweis: Verwenden Sie $\emptyset \models \mathrm{TAUT}$ und den Korrektheitssatz.
4. Welche der folgenden Menge sind vollständig und welche sind konsistent?

   i) $\mathrm{TAUT} =_{\mathrm{def}} \{H \mid H \text{ ist eine Tautologie}\}$
   ii) $\mathrm{SAT} =_{\mathrm{def}} \{H \mid H \text{ ist erfüllbar}\}$
   iii) $\mathrm{ONEREP} =_{\mathrm{def}} \{H \mid f_H(1, 1, \ldots, 1) = 1\}$

Besprechung in der Übung am 12. Januar 2022.

Zusatzübung:

I) Sei $n > 0$ eine natürliche Zahl und $H, H_i \in L_{\mathrm{AL}}$ für $1 \leq i \leq n$. Zeigen Sie durch eine vollständige Induktion die Korrektheit der folgenden Äquivalenz:

$$H \wedge \bigoplus_{i=1}^{n} H_i \equiv \bigoplus_{i=1}^{n} (H \wedge H_i)$$

II) Sei $\Phi = \{(x_1 \wedge x_2) \rightarrow x_3, x_4, \neg x_3\}$ eine Menge von Formeln. Geben Sie alle Modelle von Φ an.

III) Was versteht man unter dem „Endlichkeitssatz“. Geben Sie eine kurze Erläuterung der relevanten Begriffe.

IV) Zeigen Sie, dass $(H' \vee H) \in \{H, H \rightarrow H'\}^{\vdash}$. Geben Sie dazu alle Ableitungsschritte mit ihrer Bezeichnung an.