Diskrete Strukturen
Wintersemester 2017/2018

Hochschule RheinMain
Prof. Dr. Steffen Reith

6. Übungsblatt

Hinweis: Aufgabe 1 muss nur von Studierenden der Studiengänge AI und WI bearbeitet werden.

Hinweis: Aufgabe 2 muss nur von Studierenden des Studiengangs ITS gelöst werden.

1. In dieser Aufgabe soll der folgende Satz mit einem Rechnerexperiment überprüft werden

   Satz 1: *Sei $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $ggT(n^5 + 5, (n + 1)^5 + 5) = 1$.*

   Hinweis: Die zweistellige Funktion ggT bezeichnet den *größten gemeinsamen Teiler* zweier natürlichen Zahlen.

   Lösen Sie dazu die folgenden Teilaufgaben:

   i) Entwerfen und implementieren Sie dazu ein `Java`-Programm mit dem man bis zu einer einzugebenden Grenze m überprüfen kann, ob für alle Zahlen n unter dieser Grenze m die Eigenschaft $\mathrm{ggT}(n^5 + 5, (n + 1)^5 + 5) = 1$ haben.
   Hinweis: Die beteiligten Zahlen können sehr groß werden, verwenden Sie die Klasse `BigInteger`.

   ii) Überprüfen Sie, ob alle Zahlen $< 400\,000$ diese Eigenschaft haben. Können Sie nun sagen, ob der Satz korrekt ist? Begründen Sie Ihre Antwort!

   iii) Überprüfen Sie, ob alle Zahlen $< 1\,000\,000$ diese Eigenschaft haben. Können Sie nun sagen, ob der Satz korrekt ist?

2. Gegeben sind die Mengen $A = \{\sigma, \eta\}$ und $B = \{\Gamma, \Sigma, \Psi, \Delta\}$.

   i) Geben Sie die kartesischen Produkte $A \times B$, $A \times A$ und $B \times B$ vollständig an.

   ii) Wie viele Elemente sind in den Mengen $B \times B$ und $B \times B \times B$ enthalten? Verallgemeinern Sie Ihr Argument und geben Sie an, wie viele Elemente in A^k enthalten sind, wenn $k > 0$.

   Hinweis: Achten Sie bei der Vorstellung Ihrer Lösungen auf die korrekte Sprechweise!

3. Finden Sie einen Beweis durch Widerspruch für die Aussage: „Wenn $n + m$ eine ungerade ganze Zahl ist, dann ist entweder n oder m ungerade.“

4. Seien $n, k \in \mathbb{N}$ und $k \leq n$. Dann definieren wir $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ (Fakultät) und den Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Benutzen Sie die Tatsache

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

um zu zeigen, dass es für jedes $a \in \mathbb{N}$ mit $a > 1$ ein $b \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $(a+1)^n = a \cdot b + 1$. Sie können die Tatsache benutzen, dass alle Binomialkoeffizienten ganze Zahlen sind!

5. Für eine natürliche Zahl a sei $(a_0 a_1 a_2 \ldots a_n)_{10}$ die gewohnte *Dezimaldarstellung*. Als *Quersumme* von a definieren wir

$$\mathrm{QS}(a) = \sum_{i=0}^{n} a_i,$$

d.h. die Quersumme ist die Summe der Ziffern der Dezimaldarstellung.

Finden Sie einen Beweis für die Aussage: „a ist ohne Rest durch 3 teilbar genau dann, wenn die Quersumme $\mathrm{QS}(a)$ durch 3 teilbar."

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 3 und die Tatsache, dass $a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0$.

Besprechung in den Übungen in der KW 48 ab dem 27. November 2017.