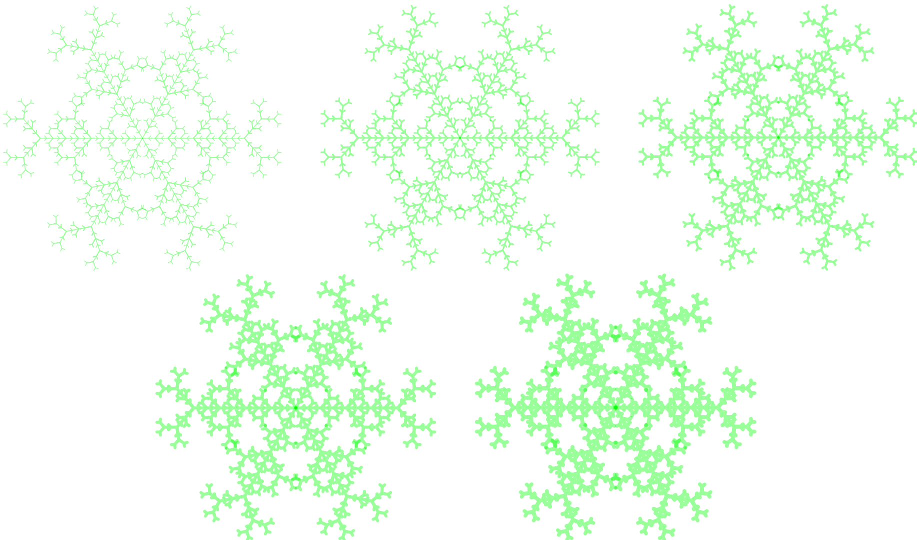
Hochschule RheinMain
Prof. Dr. Steffen Reith

9. Übungsblatt



1. Seien A und B endliche Mengen, dann gilt der folgende Zusammenhang

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$$

Dieser Zusammenhang ist als Prinzip von Inklusion-Exklusion[1] bekannt. Benutzen Sie nun dieses Prinzip.

i) Die „Unseen University (UU)" (siehe auch `http://en.wikipedia.org/wiki/Unseen_University`) mit den innovativen und prakisch hochrelevanten Studiengängen „perfect wizardry" und „ultra deeply embedded systems (UDES)" (speziell gefördert durch den großzügigen Hochschulpakt 2019 $\frac{3}{4}$) bietet für Studierende des Studiengangs „ultra deeply embedded systems" genau die zwei Vorlesungen „OOP" und „Diskrete Strukturen" im ersten Semester an.
Sei
$$A = \{x \mid x \text{ besucht OOP}\}$$
und
$$B = \{x \mid x \text{ besucht Diskrete Strukturen}\}.$$
Durch (mehrfache) hochkomplexe Zählprozesse konnte der lebhafte und überdurchschnittlich begabte Student Rincewind die folgenden Mächtigkeiten ermitteln: $\#A = 65$, $\#B = 85$ und 15 Studenten hören beide Vorlesungen. Wieviele Studenten sind in der UU mindestens eingeschrieben?

ii) Benutzen Sie nun ein geeignetes Venn-Diagramm, um die Richtigkeit des Prinzips von Inklusion-Exklusion zu belegen.
Hinweis: Zählen Sie die Mächtigkeiten der beteiligten Teilmengen!

[1] `http://mathworld.wolfram.com/Inclusion-ExclusionPrinciple.html`

iii) Seinen A, B und C Mengen. Geben Sie einen direkten Beweis für die Tatsache

$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$$

Hinweis: Denken Sie darüber nach, dass auch $A \cup B$ eine Menge ist.

2. Nun definieren wir eine (binäre) Relation „$\diamond$“ auf der Grundmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Seien $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ beliebig, dann gilt

$$A \diamond B \text{ gdw. } A \cup B = \mathbb{N}.$$

Welche der folgenden vier Eigenschaften „reflexiv“, „anti-symmetrisch“, „symmetrisch“ und „transitiv“ hat die Relation $\diamond$? Belegen Sie Ihre Aussagen!

3. Seien $R \subseteq A \times A$ und $S \subseteq A \times A$ Relationen.

   i) Beweisen Sie, dass $(R \cap S)^{-1} = S^{-1} \cap R^{-1}$.

   ii) Geben Sie mindestens eine weitere (binäre) Operation $\diamond$ auf Relationen an, so dass $(R \diamond S)^{-1} = S^{-1} \diamond R^{-1}$

4. Sei $R = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 = b^2\}$. Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist und geben Sie alle Repräsentanten einer Äquivalenzklasse $[z]$ an, wenn $z \in \mathbb{R}$.

Besprechnung und Vorrechnen in den Übungen ab dem 8. Januar 2018.