

5. Übungsblatt

1. (3 Punkte)

Gegeben sind die folgenden Teilmengen von \mathbb{Z} :

- $A = \{3n \mid n \in \mathbb{Z} \text{ und } n \geq 4\}$
- $B = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$
- $C = \{n \mid n \in \mathbb{Z} \text{ und } n^2 \leq 100\}$

Drücken Sie die folgenden Mengen unter Verwendung von geeigneten Mengenoperationen aus:

- i) Die Menge der ungeraden ganzen Zahlen iii) $\{6n \mid n \in \mathbb{Z} \text{ und } n \geq 2\}$
ii) $\{-10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ iv) $\{-9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9\}$

2. (4 Punkte)

Die *Potenzmenge* einer Menge M ist (vgl. Vorlesung) durch $\mathcal{P}(M) =_{\text{def}} \{N \mid N \subseteq M\}$ definiert.

- i) Sei $B = \{\delta, \iota, \zeta\}$. Bestimmen Sie $\mathcal{P}(B)$.
ii) Finden Sie Mengen A und B , sodass $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \neq \mathcal{P}(A \cup B)$.
iii) Können Sie Mengen A und B finden, sodass $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \neq \mathcal{P}(A \cap B)$? Wenn ja, dann geben Sie ein Beispiel. Sollten Sie kein Beispiel finden, so finden Sie (mathematische) Gründe dafür.

3. (3 Punkte)

In dieser Aufgabe wird ein neuer Operator \odot für Mengen eingeführt. Seien A und B dazu Mengen und

$$A \odot B =_{\text{def}} \overline{A \cap B}$$

Verwenden Sie die Ihnen bekannten Gesetze für das Rechnen mit Mengen, um die folgenden Eigenschaften zu belegen:

- i) $A \odot A = \overline{A}$
ii) $(A \odot A) \odot (B \odot B) = A \cup B$
iii) $(A \odot B) \odot (A \odot B) = A \cap B$

4.

(3 Punkte)

In dieser Aufgabe soll der folgende Satz überprüft werden

Satz 1: Sei $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $\text{ggT}(n^5 + 5, (n + 1)^5 + 5) = 1$.

Hinweis: Die zweistellige Funktion ggT bezeichnet den *größten gemeinsamen Teiler* zweier natürlichen Zahlen. Es lohnt sich die Methoden von `BigInt` anzusehen.

Lösen Sie dazu die folgenden Teilaufgaben:

- i) Entwerfen und implementieren Sie dazu ein Java-Programm mit dem man bis zu einer einzugebenden Grenze m überprüfen kann, ob für alle Zahlen n unter dieser Grenze m die Eigenschaft $\text{ggT}(n^5 + 5, (n + 1)^5 + 5) = 1$ haben.
Hinweis: Die beteiligten Zahlen können sehr groß werden, verwenden Sie die Klasse `BigInteger`.
- ii) Überprüfen Sie, ob alle Zahlen $< 400\,000$ diese Eigenschaft haben. Können Sie nun sagen, ob der Satz korrekt ist? Begründen Sie Ihre Antwort!
- iii) Überprüfen Sie, ob alle Zahlen $< 1\,000\,000$ diese Eigenschaft haben. Können Sie nun sagen, ob der Satz korrekt ist?

Besprechung in den Übungsgruppen ab dem 20. November 2023 in der KW47