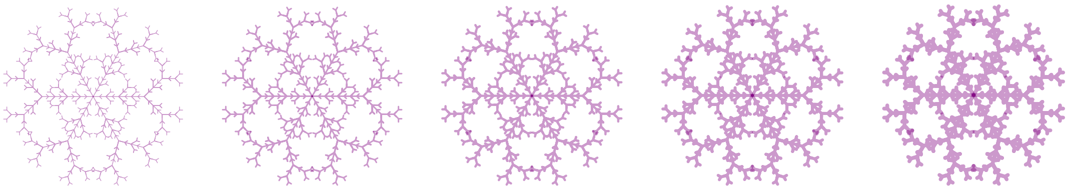
Diskrete Strukturen
Wintersemester 2023/2024

Hochschule RheinMain
Prof. Dr. Steffen Reith

8. Übungsblatt



Aufgabe 1: (Punkte 6)

Sei $\mathbb{N}_* = \{(a_1, \ldots, a_l) \mid \ l \geq 1 \text{ und } a_i \in \mathbb{N} \text{ für } 1 \leq i \leq l\}$ die Menge aller endlich langen Folgen von natürlichen Zahlen gegeben. Wir definieren nun eine Funktion $S\colon \mathbb{N}_* \to \mathbb{N}$ induktiv wie folgt:

(IA) $S((a_1)) = a_1$

(IS) $S((a_1, \ldots, a_{l+1})) = S((a_1, \ldots, a_l)) + a_{l+1}$

i) Geben Sie einen sprechenden / verständlichen Namen für die Funktion S an. Evtl. ist es hilfreich einige konkrete Beispiele zu machen.

ii) Beweisen Sie mit einer Induktion über n, dass für eine Konstante $c \in \mathbb{N}$ die Gleichung $c \cdot S((a_1, \ldots, a_l)) = S((c \cdot a_1, \ldots, c \cdot a_l))$ gilt.

Aufgabe 2: (Punkte 5)

Sei $m \geq 2$ eine natürliche Zahl, dann definieren wir die folgende Relation:

$$R_m = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m \text{ teilt } a - b \text{ ohne Rest}\}$$

Beweisen Sie, dass die folgenden drei Aussagen gelten, wenn $m \geq 2$:

i) Für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt $(a, a) \in R_m$.

ii) Wenn $(a, b) \in R_m$, dann ist auch $(b, a) \in R_m$.

iii) Wenn $(a, b) \in R_m$ und $(b, c) \in R_m$, dann ist auch $(a, c) \in R_m$.

Aufgabe 3: (Punkte 4)

Seien $R \subseteq A \times A$ und $S \subseteq A \times A$ Relationen.

i) Beweisen Sie, dass $(R \cap S)^{-1} = S^{-1} \cap R^{-1}$.

ii) Geben Sie mindestens eine weitere (binäre) Operation $\diamond$ auf Relationen an, so dass $(R \diamond S)^{-1} = S^{-1} \diamond R^{-1}$

Besprechung in den Übungsgruppen ab dem 11. Dezember 2023 in der KW50