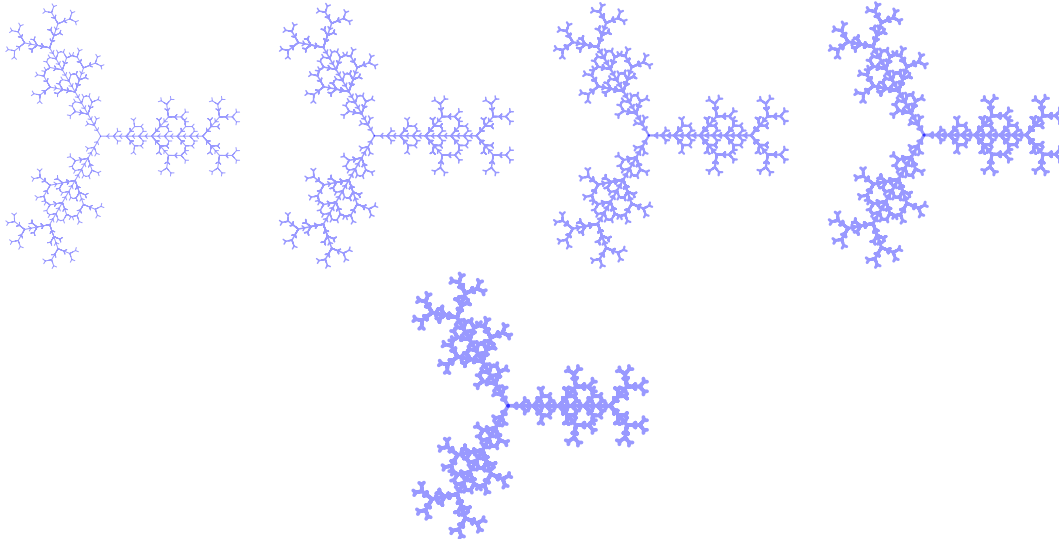


9. Übungsblatt



1. (3 Punkte)

Seien A und B endliche Mengen, dann gilt der folgende Zusammenhang

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$$

Dieser Zusammenhang ist als Prinzip von Inklusion-Exklusion¹ bekannt. Benutzen Sie nun dieses Prinzip.

- i) Die „Unseen University (kurz: HSRM)“ (siehe auch http://en.wikipedia.org/wiki/Unseen_University) mit den innovativen und praktisch hochrelevanten Studiengängen „perfect wizardry (PW)“, „startup magic (SM)“ und „ultra deeply embedded systems (UDES)“ (speziell gefördert durch den (trotz Haushaltskrise!) großzügigen Hochschulpakt 2019 $\frac{3\pi}{4}$) bietet für Studierende des Studiengangs „ultra deeply embedded systems“ genau die zwei Vorlesungen „OOP“ und „Diskrete Strukturen“ im ersten Semester an.

Sei

$$A = \{x \mid x \text{ besucht OOP}\}$$

und

$$B = \{x \mid x \text{ besucht Diskrete Strukturen}\}.$$

Durch (mehrfache) hochkomplexe Zählprozesse konnte der lebhafte und überdurchschnittlich begabte Student RINCEWIND die folgenden Mächtigkeiten ermitteln: $\#A = 65$, $\#B = 85$ und 15 Studenten hören beide Vorlesungen. Wieviele Studenten sind in der UU mindestens eingeschrieben?

¹<http://mathworld.wolfram.com/Inclusion-ExclusionPrinciple.html>

ii) Benutzen Sie nun ein geeignetes Venn-Diagramm, um die Richtigkeit des Prinzips von Inklusion-Exklusion zu belegen.

Hinweis: Zählen Sie die Mächtigkeiten der beteiligten Teilmengen!

iii) Seien A , B und C Mengen. Geben Sie einen direkten Beweis für die Tatsache

$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$$

Hinweis: Denken Sie darüber nach, dass auch $A \cup B$ eine Menge ist.

2. (4 Punkte)

Nun definieren wir eine (binäre) Relation „ \diamond “ auf der Grundmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Seien $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ beliebig, dann gilt

$$A \diamond B \text{ gdw. } A \cup B = \mathbb{N}.$$

Welche der folgenden vier Eigenschaften „reflexiv“, „anti-symmetrisch“, „symmetrisch“ und „transitiv“ hat die Relation \diamond ? Belegen Sie Ihre Aussagen!

3. (4 Punkte)

Seien $R \subseteq A \times A$ und $S \subseteq A \times A$ Relationen.

i) Beweisen Sie, dass $(R \cap S)^{-1} = S^{-1} \cap R^{-1}$.

ii) Geben Sie mindestens eine weitere (binäre) Operation „ \diamond “ auf Relationen an, so dass $(R \diamond S)^{-1} = S^{-1} \diamond R^{-1}$

Besprechung ab dem 18.12.2023 in der KW51 (Onlinewoche) wie mit Ihren Übungsleitern besprochen.