Diskrete Strukturen
Wintersemester 2023/2024

Hochschule RheinMain
Prof. Dr. Steffen Reith

11. Übungsblatt

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Gegeben ist die folgende induktiv definierte Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

(IA) $a_0 = 1$

(IS) $a_{n+1} = \frac{2+a_n}{1+a_n}$

i) Berechnen Sie a_i für $0 \leq i \leq 4$.
ii) Zeigen Sie mithilfe einer vollständigen Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 \leq a_n \leq 2$.

    Hinweis: Wenn Sie Ungleichungen im Hilfe der Induktion untersuchen, dann verwenden Sie die Induktionsvoraussetzung um im Induktionsschritt Terme kontrolliert größer oder kleiner zu machen.

Aufgabe 2: (3 Punkte)

Sei die Relation $x \neq y$ über $\mathbb{Z}$ gegeben. Ist diese Relation reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch oder transitiv?

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f(x) = 11 \cdot x - 7$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g(x) = e^x$ und $h\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $h(x) = x^6$. Zeigen Sie, dass

i) f bijektiv,
ii) g injektiv und
iii) h weder surjektiv noch injektiv ist.

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Sei $L_{\text{AL}} = \{H \mid H \text{ ist eine aussagenlogische Formel}\}$ und $R = \{(H, H') \in L_{\text{AL}} \times L_{\text{AL}} \mid H \to H' \text{ ist eine Tautologie}\}$. Zeigen Sie, dass R eine Halbordnung ist.
Hinweis: Beim Prüfen der Antisymmetrie können Sie davon ausgehen, dass „=“ hier als „≡“ (logisch äquivalent) zu interpretieren ist.

Besprechungen in den Übungsgruppen ab dem 15. Januar 2024.