Diskrete Strukturen
Wintersemester 2023/2014

Hochschule RheinMain
Prof. Dr. Steffen Reith

12. Übungsblatt

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Folge von unterschiedlichen Knoten $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ mit $(v_{i-1}, v_i) \in E$ und $1 \leq i \leq k$ heißt *Pfad* oder *Weg* von v_0 nach v_k der Länge k. Ein Weg der Länge 0 besteht nur aus einem Knoten und heißt *trivialer Weg.*

1. Mit $Z \subseteq V \times V$ bezeichnen wir die binäre Relation

$$Z = \{(u, v) \in V \times V \mid \text{ es gibt einen Weg von } u \text{ nach } v\}.$$

   Zeigen Sie, dass Z eine Äquivalenzrelation ist. Beschreiben Sie die Menge der Äquivalenzklassen von Z anschaulich.

2. Sei $i \geq 1$, $V_i = \{1, \ldots, i\}$ und $K_i = (V_i, (V_i \times V_i) \setminus \{(v, v) \mid v \in V_i\})$ der vollständige ungerichtete Graph mit i Knoten. Zeichnen Sie eine graphische Darstellung von $K_1, K_2, \ldots, K_5$. Finden Sie eine Formel, die die Anzahl der Kanten in K_i für $i > 1$ angibt und beweisen Sie diese mithilfe der vollständigen Induktion.
   Hinweis: Zählen Sie die Kanten (u, v) und (v, u) nur als eine Kante, d.h. wir verschmelzen diese Kanten zu einer ungerichteten.

3. Die Menge der *binären Bäume* ist induktiv wie folgt definiert:

   (IA) Der ungerichtete Graph B ohne Kanten mit genau einem Knoten w ist ein binärer Baum. Dabei heißt w *Wurzel* von B.

   (IS) Seien $B_1 = (V_1, E_1)$ und $B_2 = (V_2, E_2)$ binäre Bäume mit disjunkten Knotenmengen, d.h. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ und Wurzeln w_1 bzw.w_2. Sei W der ungerichtete Graph $W = (\{w, w_1, w_2\}, \{(w, w_1), (w, w_2)\})$, wobei $w \notin V_1 \cup V_2$. Dann ist auch $B_1 \cup B_2 \cup W$ ein binärer Baum mit Wurzel w.

   Alles andere ist kein binärer Baum.

   Beweisen Sie mithilfe einer Induktion, dass zwischen zwei beliebigen Knoten in einem binären Baum ein Pfad existiert.

   Hinweis: Zeichnen Sie sich erst einige binäre Bäume graphisch auf und überlegen Sie, welche Fälle zu untersuchen sind.

Besprechung und Vorrechnen in den Übungen ab dem 22. Januar 2024