Automatentheorie und Formale Sprachen

für die Studiengänge

- Angewandte Informatik
- Informatik - Technische Systeme

04 Reguläre Sprachen: Reguläre Ausdrücke

Prof. Dr. David Sabel
Sommersemester 2025

Stand der Folien: 20. Mai 2025

Reguläre Ausdrücke

Hochschule RheinMain

- Reguläre Ausdrücke sind (wie Automaten und Grammatiken) ein Formalismus zur Repräsentation von Sprachen.
- Praktische Verwendung: Regex-Bibliotheken in Programmiersprachen oder bei der Shell-Programmierung zum Suchen und Ersetzen von Zeichenketten (verwenden meist **erweiterte** reguläre Ausdrücke)
- Aufbau regulärer Ausdrücke:
  Basisausdrücke und Operatoren zum Zusammensetzen

Definition (Regulärer Ausdruck)

Sei Σ ein Alphabet. Ein regulärer Ausdruck über Σ ist induktiv definiert:

- $\emptyset$ ist ein regulärer Ausdruck
- ε ist ein regulärer Ausdruck
- a mit $a \in \Sigma$ ist ein regulärer Ausdruck
- Wenn α_1 und α_2 reguläre Ausdrücke sind, dann auch $\alpha_1\alpha_2$
- Wenn α_1 und α_2 reguläre Ausdrücke sind, dann auch $(\alpha_1|\alpha_2)$
- Wenn α regulärer Ausdruck ist, dann auch $(\alpha)^*$

Reguläre Ausdrücke (3)

Erzeugte Sprache

Die von einem regulären Ausdruck α erzeugte Sprache $L(\alpha)$ ist induktiv über dessen Struktur definiert:

$$\begin{aligned}
L(\emptyset) &:= \emptyset \\
L(\varepsilon) &:= \{\varepsilon\} \\
L(a) &:= \{a\} \quad \text{für } a \in \Sigma \\
L(\alpha_1\alpha_2) &:= L(\alpha_1)L(\alpha_2) = \{uv \mid u \in L(\alpha_1), v \in L(\alpha_2)\} \\
L(\alpha_1|\alpha_2) &:= L(\alpha_1) \cup L(\alpha_2) \\
L((\alpha)^*) &:= L(\alpha)^*
\end{aligned}$$

Für alle regulären Ausdrücke $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ gilt:

$$L((\alpha_1|\alpha_2)|\alpha_3) = L(\alpha_1|(\alpha_2|\alpha_3))$$

Daher lassen wir Klammern weg und schreiben $(\alpha_1|\alpha_2|\ldots|\alpha_n)$.

Quiz 1

Welches Konstrukt ist eigentlich überflüssig, da es durch andere dargestellt werden kann?

1. $(\alpha)^*$
2. $(\alpha_1 \mid \alpha_2)$
3. ε
4. $\alpha_1\alpha_2$
5. $\emptyset$

arsnova.hs-rm.de

6750 1376

Beachte...

Hochschule RheinMain

$\emptyset^* = ?$

Beispiele

- $(a|b)^*aa(a|b)^*$

  erzeugt alle Wörter über $\{a,b\}$, die ?

- $(\varepsilon|((a|b|c)^*a(a|b|c)(a|b|c)(a|b|c)))$

  erzeugt alle Wörter über $\{a,b,c\}$, die ?

- $((0|1|2|3|4|5|6|7|8|9)|1(0|1|2|3|4|5|6|7|8|9)|(2(0|1|2|3)))$: $((0|1|2|3|4|5)(0|1|2|3|4|5|6|7|8|9))$

  erzeugt ?

- Eine endliche Sprache $S = \{w_1,\ldots,w_n\}$ wird durch ? erzeugt.

Beispiele

Hochschule RheinMain

- $(a|b)^*aa(a|b)^*$

  erzeugt alle Wörter über $\{a,b\}$, die zwei aufeinanderfolgende a's enthalten

- $(\varepsilon|((a|b|c)^*a(a|b|c)(a|b|c)(a|b|c)))$

  erzeugt alle Wörter über $\{a,b,c\}$, die ?

- $((0|1|2|3|4|5|6|7|8|9)|1(0|1|2|3|4|5|6|7|8|9)|(2(0|1|2|3)))$: $((0|1|2|3|4|5)(0|1|2|3|4|5|6|7|8|9))$

  erzeugt ?

- Eine endliche Sprache $S = \{w_1, \ldots, w_n\}$ wird durch ? erzeugt.

Beispiele

Hochschule RheinMain

- $(a|b)^*aa(a|b)^*$

  erzeugt alle Wörter über $\{a, b\}$, die zwei aufeinanderfolgende a's enthalten

- $(\varepsilon|((a|b|c)^*a(a|b|c)(a|b|c)(a|b|c)))$

  erzeugt alle Wörter über $\{a, b, c\}$, die an viertletzter Stelle ein a haben und das leere Wort

- $((0|1|2|3|4|5|6|7|8|9)|1(0|1|2|3|4|5|6|7|8|9)|(2(0|1|2|3))) :$
  $((0|1|2|3|4|5)(0|1|2|3|4|5|6|7|8|9))$

  erzeugt ?

- Eine endliche Sprache $S = \{w_1, \ldots, w_n\}$ wird durch ? erzeugt.

Beispiele

Hochschule RheinMain

- $(a|b)^*aa(a|b)^*$

  erzeugt alle Wörter über $\{a,b\}$, die zwei aufeinanderfolgende a's enthalten

- $(\varepsilon|((a|b|c)^*a(a|b|c)(a|b|c)(a|b|c)))$

  erzeugt alle Wörter über $\{a,b,c\}$, die an viertletzter Stelle ein a haben und das leere Wort

- $((0|1|2|3|4|5|6|7|8|9)|1(0|1|2|3|4|5|6|7|8|9)|(2(0|1|2|3))) :$
  $((0|1|2|3|4|5)(0|1|2|3|4|5|6|7|8|9))$

  erzeugt alle Uhrzeiten im 24-Stunden-Format

- Eine endliche Sprache $S = \{w_1, \ldots, w_n\}$ wird durch ? erzeugt.

Beispiele

Hochschule RheinMain

- $(a|b)^*aa(a|b)^*$

  erzeugt alle Wörter über $\{a,b\}$, die zwei aufeinanderfolgende a's enthalten

- $(\varepsilon|((a|b|c)^*a(a|b|c)(a|b|c)(a|b|c)))$

  erzeugt alle Wörter über $\{a,b,c\}$, die an viertletzter Stelle ein a haben und das leere Wort

- $((0|1|2|3|4|5|6|7|8|9)|1(0|1|2|3|4|5|6|7|8|9)|(2(0|1|2|3))):$
  $((0|1|2|3|4|5)(0|1|2|3|4|5|6|7|8|9))$

  erzeugt alle Uhrzeiten im 24-Stunden-Format

- Eine endliche Sprache $S = \{w_1, \ldots, w_n\}$ wird durch $(w_1|\ldots|w_n)$ erzeugt.

Quiz 2

Hochschule RheinMain

Welcher reguläre Ausdruck erzeugt die Sprache

$$\{u \in \{a, b\}^* \mid |u| = 4\}?$$

1. $(ab)^*(ab)^*(ab)^*(ab)^*$
2. $(a|b)(a|b)(a|b)(a|b)$
3. $(aaaa|bbbb)$
4. $(ab|ab|ab|ab)$
5. $(aa|ab|ba|bb)(aa|ab|ba|bb)$

arsnova.hs-rm.de

6750 1376

Quiz 3

Hochschule RheinMain

Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der die Sprache

$$\{u \in \{a,b\}^* \mid |u| \geq 4\}$$

erzeugt.

arsnova.hs-rm.de

6750 1376

Quiz 4

Hochschule RheinMain

Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der die Sprache

$$\{u \in \{a,b\}^* \mid |u| \leq 4\}$$

erzeugt.

arsnova.hs-rm.de

6750 1376

Komplement von regulären Ausdrücken

- Allgemein: Es gibt keinen „Komplementoperator“ für reguläre Ausdrücke.
- Harte Methode: Regulärer Ausdruck $\to$ NFA $\to$ DFA $\to$ NFA für das Komplement $\to$ DFA $\to$ regulärer Ausdruck
- Einfachere Methode:
  1.Schritt: Regulärer Ausdruck $\to$ einfache Beschreibung der erzeugten Sprache
  2.Schritt: $\to$ einfache Beschreibung des Komplements
  3.Schritt: $\to$ regulärer Ausdruck

Aufgabe (Schritt für Schritt)

Hochschule **RheinMain**

Ziel: *Finde regulären Ausdruck für das Komplement, der von* 0^*10^* *erzeugten Sprache*

Quiz 5

Welche Sprache wird von 0^*10^* erzeugt?

arsnova.hs-rm.de

6750 1376

Quiz 6

Hochschule RheinMain

Was ist das Komplement der Sprache aller Wörter über $\{0, 1\}$, die genau eine 1 enhalten.

arsnova.hs-rm.de

6750 1376

Quiz 7

Hochschule RheinMain

Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der alle Wörter über $\{0, 1\}$ erzeugt, die keine Einsen enthalten.

arsnova.hs-rm.de

6750 1376

Quiz 8

Hochschule RheinMain

Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der alle Wörter über $\{0, 1\}$ erzeugt, die mindestens 2 Einsen enthalten.

arsnova.hs-rm.de

6750 1376

Ziel: *Finde regulären Ausdruck für das Komplement, der von* 0^*10^* *erzeugten Sprache*

Regulärer Ausdruck für das Komplement von 0^*10^*: $0^*|(0|1)^*1(0|1)^*1(0|1)^*$

Beispiel: grep

```
$ grep -E " d(er|ie|as) neue" faust.txt
  Nein, er gefällt mir nicht, der neue Burgemeister!
  Allein der neue Trieb erwacht,
  Da seh' ich auch die neue Wohnung,
  Noch blendet ihn der neue Tag.

$ grep -E "(der|die|das) Q[a-z]*" faust.txt
  Von dem der Quell sich ewig sprudelnd stürzt,
  Vom ganzen Praß die Quintessenz.


$ grep -E "(( )*Gretchen[[:punct:]]*){2,}" faust.txt
  Gretchen!  Gretchen!
```

Satz von Kleene

Hochschule RheinMain

Theorem 3.6.4 (Satz von Kleene)

Reguläre Ausdrücke erzeugen genau die regulären Sprachen.

Beweis in zwei Teilen:

1. Jede von einem regulären Ausdruck erzeugte Sprache ist regulär.
2. Für jede reguläre Sprache gibt es einen regulären Ausdruck, der sie erzeugt.

Beweis: Satz von Kleene (1)

1. Jede von einem regulären Ausdruck erzeugte Sprache ist regulär.

Beweis:

Beweis: Satz von Kleene (1)

1. Jede von einem regulären Ausdruck erzeugte Sprache ist regulär.

Beweis:

- Wir konstruieren für regulären Ausdruck α einen NFA M_α mit ε-Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, sodass $L(M_\alpha) = L(\alpha)$.

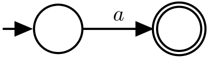
Beweis: Satz von Kleene (1)

1. Jede von einem regulären Ausdruck erzeugte Sprache ist regulär.
Beweis:
   - Wir konstruieren für regulären Ausdruck α einen NFA M_α mit ε-Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, sodass $L(M_\alpha) = L(\alpha)$.
   - Induktion über die Struktur von α

Beweis: Satz von Kleene (1)

1. Jede von einem regulären Ausdruck erzeugte Sprache ist regulär.

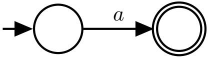
Beweis:

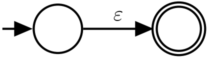
- Wir konstruieren für regulären Ausdruck α einen NFA M_α mit ε-Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, sodass $L(M_\alpha) = L(\alpha)$.
- Induktion über die Struktur von α
- Basisfälle:
  - Für $\alpha = a \in \Sigma$ konstruiere 

Beweis: Satz von Kleene (1)

1. Jede von einem regulären Ausdruck erzeugte Sprache ist regulär.

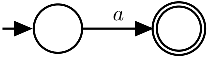
Beweis:

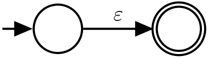
- Wir konstruieren für regulären Ausdruck α einen NFA M_α mit ε-Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, sodass $L(M_\alpha) = L(\alpha)$.
- Induktion über die Struktur von α
- Basisfälle:
  - Für $\alpha = a \in \Sigma$ konstruiere 

  - Für $\alpha = \varepsilon$ konstruiere 

Beweis: Satz von Kleene (1)

1. Jede von einem regulären Ausdruck erzeugte Sprache ist regulär.
Beweis:

- Wir konstruieren für regulären Ausdruck α einen NFA M_α mit ε-Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, sodass $L(M_\alpha) = L(\alpha)$.
- Induktion über die Struktur von α
- Basisfälle:
  - Für $\alpha = a \in \Sigma$ konstruiere 

  - Für $\alpha = \varepsilon$ konstruiere 

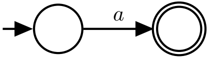
  - Für $\alpha = \emptyset$ konstruiere 

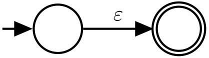
Beweis: Satz von Kleene (1)

Hochschule RheinMain

1. Jede von einem regulären Ausdruck erzeugte Sprache ist regulär.

Beweis:

- Wir konstruieren für regulären Ausdruck α einen NFA M_α mit ε-Übergängen und eindeutigen Start- und Endzuständen, sodass $L(M_\alpha) = L(\alpha)$.
- Induktion über die Struktur von α
- Basisfälle:
  - Für $\alpha = a \in \Sigma$ konstruiere 

  - Für $\alpha = \varepsilon$ konstruiere 

  - Für $\alpha = \emptyset$ konstruiere 

  In allen Fällen ist $L(\alpha) = L(M_\alpha)$ offensichtlich

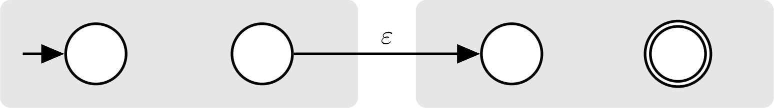
Beweis: Satz von Kleene (2)

- Induktionsschritt: Betrachte den Aufbau von α (3 Fälle)
  - Für $\alpha = \alpha_1\alpha_2$, liefert die I.H. $M_{\alpha_1}, M_{\alpha_2}$.

Beweis: Satz von Kleene (2)

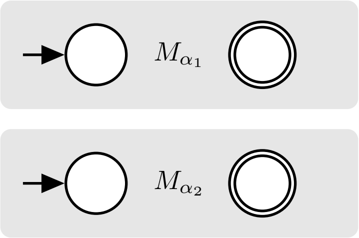
- Induktionsschritt: Betrachte den Aufbau von α (3 Fälle)
  - Für $\alpha = \alpha_1\alpha_2$, liefert die I.H. $M_{\alpha_1}, M_{\alpha_2}$.

Konstruiere daraus M_α:



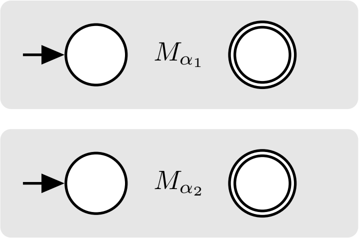
Beweis: Satz von Kleene (3)

- Für $\alpha = (\alpha_1|\alpha_2)$ liefert die I.H. $M_{\alpha_1}, M_{\alpha_2}$:

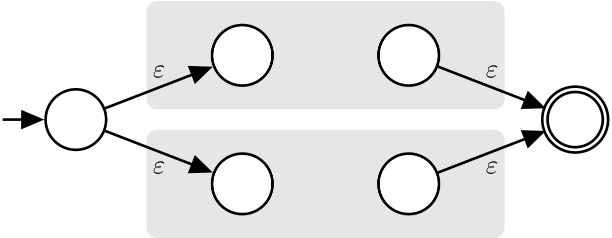


Beweis: Satz von Kleene (3)

- Für $\alpha = (\alpha_1|\alpha_2)$ liefert die I.H. $M_{\alpha_1}, M_{\alpha_2}$:

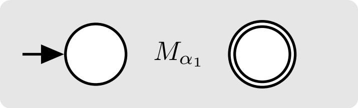


Konstruiere daraus M_α:



Beweis: Satz von Kleene (4)

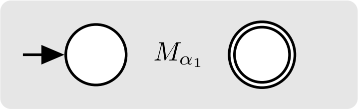
- Für $\alpha = (\alpha_1)^*$ liefert die I.H. M_{α_1}



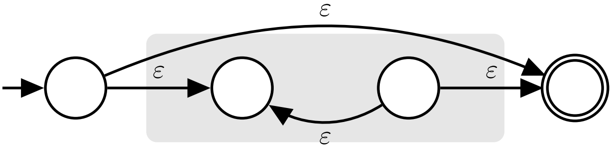
Beweis: Satz von Kleene (4)

Hochschule RheinMain

- Für $\alpha = (\alpha_1)^*$ liefert die I.H. M_{α_1}



Konstruiere daraus M_α:



Beispiel: Regulärer Ausdruck $\to$ NFA mit ε-Übergängen

NFA zum regulären Ausdruck

$$(\varepsilon|(a|b)^*b(a|b))$$

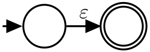
konstruieren:

Beispiel: Regulärer Ausdruck $\rightarrow$ NFA mit ε-Übergängen

NFA zum regulären Ausdruck

$$(\varepsilon|(a|b)^*b(a|b))$$

konstruieren:

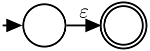


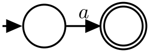
Beispiel: Regulärer Ausdruck $\to$ NFA mit ε-Übergängen

NFA zum regulären Ausdruck

$$(\varepsilon|(a|b)^*b(a|b))$$

konstruieren:



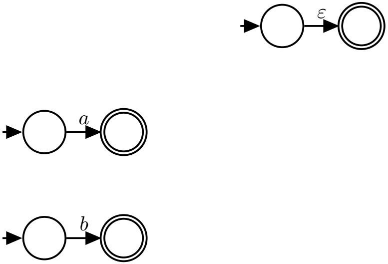


Beispiel: Regulärer Ausdruck $\to$ NFA mit ε-Übergängen

NFA zum regulären Ausdruck

$$(\varepsilon|(a|b)^*b(a|b))$$

konstruieren:

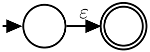


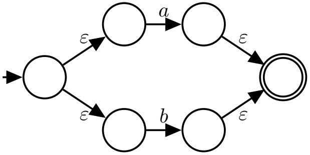
Beispiel: Regulärer Ausdruck $\rightarrow$ NFA mit ε-Übergängen

NFA zum regulären Ausdruck

$$(\varepsilon|(a|b)^*b(a|b))$$

konstruieren:



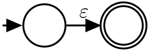


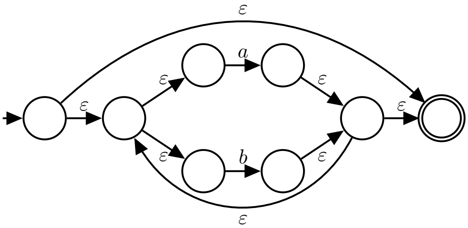
Beispiel: Regulärer Ausdruck $\rightarrow$ NFA mit ε-Übergängen

NFA zum regulären Ausdruck

$$(\varepsilon|(a|b)^*b(a|b))$$

konstruieren:



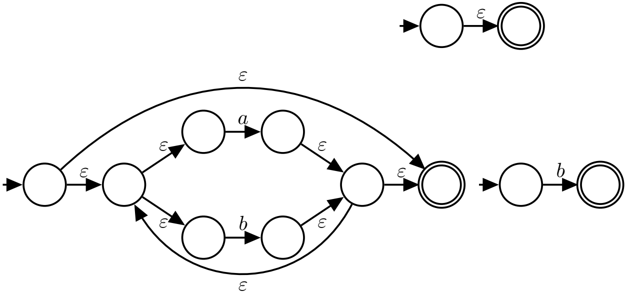


Beispiel: Regulärer Ausdruck $\rightarrow$ NFA mit ε-Übergängen

NFA zum regulären Ausdruck

$$(\varepsilon|(a|b)^*b(a|b))$$

konstruieren:



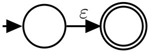
Beispiel: Regulärer Ausdruck $\rightarrow$ NFA mit ε-Übergängen

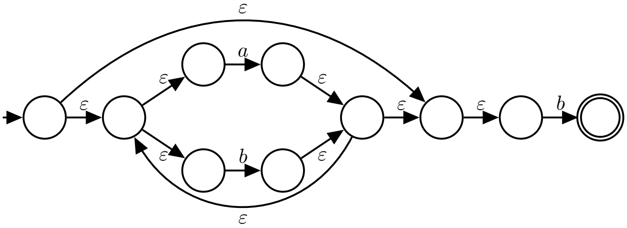
Hochschule RheinMain

NFA zum regulären Ausdruck

$$(\varepsilon|(a|b)^*b(a|b))$$

konstruieren:



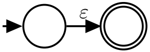


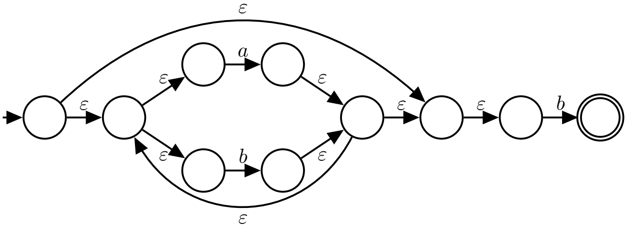
Beispiel: Regulärer Ausdruck $\to$ NFA mit ε-Übergängen

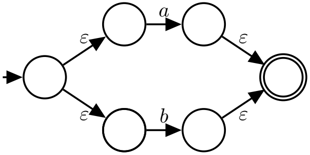
NFA zum regulären Ausdruck

$$(\varepsilon|(a|b)^*b(a|b))$$

konstruieren:







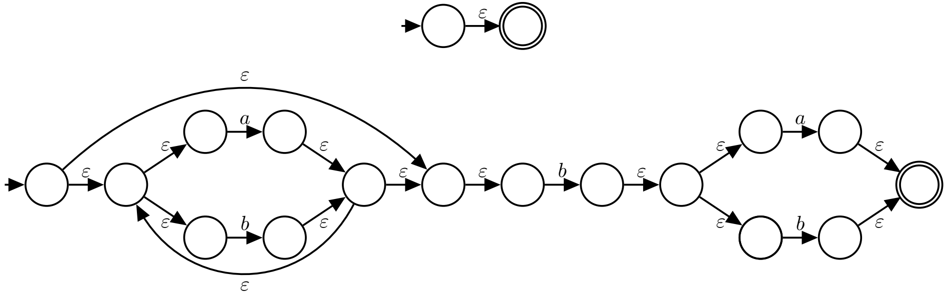
Beispiel: Regulärer Ausdruck $\rightarrow$ NFA mit ε-Übergängen

Hochschule RheinMain

NFA zum regulären Ausdruck

$$(\varepsilon|(a|b)^*b(a|b))$$

konstruieren:

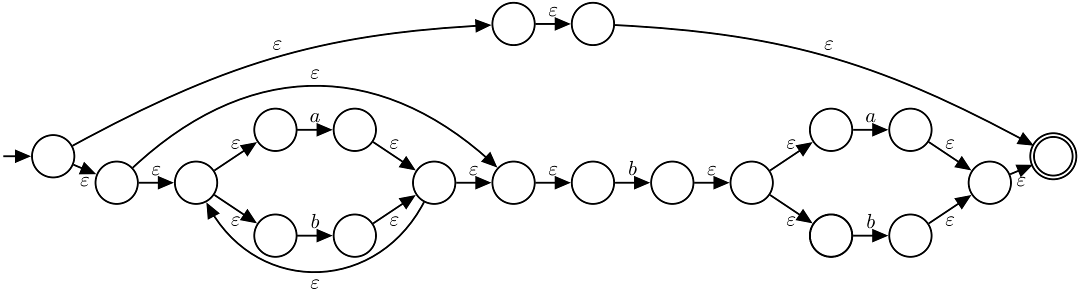


Beispiel: Regulärer Ausdruck $\rightarrow$ NFA mit ε-Übergängen

NFA zum regulären Ausdruck

$$(\varepsilon|(a|b)^*b(a|b))$$

konstruieren:



Beweis: Satz von Kleene (5)

2. Für jede reg. Sprache L gibt es einen regulären Ausdruck α mit $L(\alpha) = L$

Beweis:

Beweis: Satz von Kleene (5)

2. Für jede reg. Sprache L gibt es einen regulären Ausdruck α mit $L(\alpha) = L$

Beweis:

- Sei DFA $M = (\{z_1, \ldots, z_n\}, \Sigma, \delta, z_1, E)$ mit $L(M) = L$ gegeben.

Beweis: Satz von Kleene (5)

2. Für jede reg. Sprache L gibt es einen regulären Ausdruck α mit $L(\alpha) = L$

Beweis:

- Sei DFA $M = (\{z_1, \ldots, z_n\}, \Sigma, \delta, z_1, E)$ mit $L(M) = L$ gegeben.
- Für $w \in \Sigma^*$ und z_i, z_j mit $\widehat{\delta}(z_i, w) = z_j$ sei $visit_i(w) = q_1, \ldots, q_m$ die Folge der besuchten Zustände (wobei $q_1 = z_i$ und $q_m = z_j$).

Beweis: Satz von Kleene (5)

Hochschule **RheinMain**

2. Für jede reg. Sprache L gibt es einen regulären Ausdruck α mit $L(\alpha) = L$

Beweis:

- Sei DFA $M = (\{z_1, \ldots, z_n\}, \Sigma, \delta, z_1, E)$ mit $L(M) = L$ gegeben.
- Für $w \in \Sigma^*$ und z_i, z_j mit $\widehat{\delta}(z_i, w) = z_j$ sei $visit_i(w) = q_1, \ldots, q_m$ die Folge der besuchten Zustände (wobei $q_1 = z_i$ und $q_m = z_j$). ,
- Wir definieren:

$$L_{i,j}^k = \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; \begin{array}{l} \widehat{\delta}(z_i, w) = z_j \text{ und } visit_i(w) = q_1, \ldots, q_m, \\ \text{sodass für } 1 < l < m\text{: wenn } q_l = z_p \text{ dann } p \leq k \end{array} \right\}$$

$L_{i,j}^k$ enthält die Wörter, die M von Zustand z_i zu Zustand z_j führen ohne dabei Zwischenzustände mit Index größer als k zu benutzen.

Beweis: Satz von Kleene (5)

2. Für jede reg. Sprache L gibt es einen regulären Ausdruck α mit $L(\alpha) = L$

Beweis:

- Sei DFA $M = (\{z_1, \ldots, z_n\}, \Sigma, \delta, z_1, E)$ mit $L(M) = L$ gegeben.
- Für $w \in \Sigma^*$ und z_i, z_j mit $\widehat{\delta}(z_i, w) = z_j$ sei $visit_i(w) = q_1, \ldots, q_m$ die Folge der besuchten Zustände (wobei $q_1 = z_i$ und $q_m = z_j$). ,
- Wir definieren:

$$L_{i,j}^k = \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; \begin{array}{l} \widehat{\delta}(z_i, w) = z_j \text{ und } visit_i(w) = q_1, \ldots, q_m, \\ \text{sodass für } 1 < l < m\text{: wenn } q_l = z_p \text{ dann } p \leq k \end{array} \right\}$$

$L_{i,j}^k$ enthält die Wörter, die M von Zustand z_i zu Zustand z_j führen ohne dabei Zwischenzustände mit Index größer als k zu benutzen.

- Mit Induktion über k zeigen wir:

Es gibt reguläre Ausdrücke $\alpha_{i,j}^k$ mit $L(\alpha_{i,j}^k) = L_{i,j}^k$.

Beweis: Satz von Kleene (6)

Hochschule RheinMain

Zur Erinnerung: $L_{i,j}^k$ enthält die Wörter, die M von Zustand z_i zu Zustand z_j führen ohne dabei Zwischenzustände mit Index größer als k zu benutzen.

Basis: $k = 0$

- Wenn $i \neq j$, dann ist $L_{i,j}^0 = \{a \in \Sigma \mid \delta(z_i, a) = z_j\}$.

  Falls $L_{i,j}^0 = \{a_1, \ldots, a_q\}$, dann gilt $L(\alpha_{i,j}^0) = L_{i,j}^0$ für $\alpha_{i,j}^0 = (a_1|\ldots|a_q)$.

  Falls $L_{i,j}^0 = \emptyset$, dann gilt $L(\alpha_{i,j}^0) = L_{i,j}^0$ mit $\alpha_{i,j}^0 = \emptyset$.

- Wenn $i = j$, dann ist $L_{i,i}^0 = \{\varepsilon\} \cup \{a \in \Sigma \mid \delta(z_i, a) = z_i\}$.

  Sei $L_{i,i}^0 = \{\varepsilon, a_1, \ldots, a_q\}$.

  Dann gilt $L(\alpha_{i,i}^0) = L_{i,i}^0$ für $\alpha_{i,i}^0 = (\varepsilon|a_1|\ldots|a_q)$.

Beweis: Satz von Kleene (7)

Hochschule RheinMain

Zur Erinnerung: $L^k_{i,j}$ enthält die Wörter, die M von Zustand z_i zu Zustand z_j führen ohne dabei Zwischenzustände mit Index größer als k zu benutzen.

Induktionsschritt: $k \to k+1$

$$L^{k+1}_{i,j} = L^k_{i,j} \cup L^k_{i,k+1}(L^k_{k+1,k+1})^* L^k_{k+1,j},$$

denn entweder läuft M ohne Zustand z_{k+1} zu besuchen, oder der Lauf kann in 3 Teile gespalten werden:

1. Lauf von z_i bis zum ersten Besuch des Zustands z_{k+1} (abgedeckt durch $L^k_{i,k+1}$)
2. Mehrmaliges, zyklisches Besuchen von $k+1$ (beliebig oft) (abgedeckt durch $L^k_{k+1,k+1}$)
3. Letztmaliges Verlassen von z_{k+1} und Lauf bis zu z_j (abgedeckt durch $L^k_{k+1,j}$)

Daher gilt $\alpha^{k+1}_{i,j} = (\alpha^k_{i,j}|\alpha^k_{i,k+1}(\alpha^k_{k+1,k+1})^*\alpha^k_{k+1,j})$ und $L(\alpha^{k+1}_{i,j}) = L^{k+1}_{i,j}$.

Beweis: Satz von Kleene (8)

Hochschule RheinMain

Zur Erinnerung: $L^k_{i,j}$ enthält die Wörter, die M von Zustand z_i zu Zustand z_j führen ohne dabei Zwischenzustände mit Index größer als k zu benutzen.

Damit haben wir bewiesen:

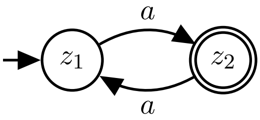
Es gibt reguläre Ausdrücke $\alpha^k_{i,j}$ mit $L(\alpha^k_{i,j}) = L^k_{i,j}$

Jetzt müssen wir noch zeigen,dass es einen regulären Ausdruck gibt, der $L(M)$ erzeugt.

Sei die Menge der Endzustände $E = \{z_{i_1}, \ldots, z_{i_r}\}$.

Dann gilt $L(\alpha^n_{1,i_1}|\alpha^n_{1,i_2}|\ldots|\alpha^n_{1,i_r}) = \bigcup\limits_{z_i \in E} L^n_{1,i} = L(M)$ $\square$

Beispiel: DFA $\to$ regulärer Ausdruck



Regulärer Ausdruck dazu:

$$\begin{aligned}\alpha^2_{1,2} &= (\alpha^1_{1,2}|\alpha^1_{1,2}(\alpha^1_{2,2})^*\alpha^1_{2,2}) \\ &= ((a|\varepsilon(\varepsilon)^*a)\,|\,(a|\varepsilon(\varepsilon)^*a)\,(\varepsilon|a(\varepsilon)^*a)^*\,(\varepsilon|a(\varepsilon)^*a))\end{aligned}$$

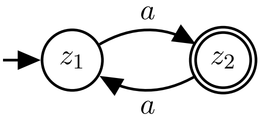
denn

$$\alpha^0_{1,1} = \varepsilon \qquad \alpha^0_{2,2} = \varepsilon \qquad \alpha^0_{1,2} = a \qquad \alpha^0_{2,1} = a$$

$$\alpha^1_{1,2} = (\alpha^0_{1,2}|\alpha^0_{1,1}(\alpha^0_{1,1})^*\alpha^0_{1,2}) = (a|\varepsilon(\varepsilon)^*a)$$

$$\alpha^1_{2,2} = (\alpha^0_{2,2}|\alpha^0_{2,1}(\alpha^0_{1,1})^*\alpha^0_{1,2}) = (\varepsilon|a(\varepsilon)^*a)$$

Beispiel: DFA $\to$ regulärer Ausdruck



Regulärer Ausdruck dazu:

$$\begin{aligned}\alpha^2_{1,2} &= (\alpha^1_{1,2}|\alpha^1_{1,2}(\alpha^1_{2,2})^*\alpha^1_{2,2})\\ &= ((a|\varepsilon(\varepsilon)^*a)\,|\,(a|\varepsilon(\varepsilon)^*a)\;(\varepsilon|a(\varepsilon)^*a)^*\;(\varepsilon|a(\varepsilon)^*a))\\ &= (a|a(aa)^*)\ \text{(durch Vereinfachung)}\end{aligned}$$

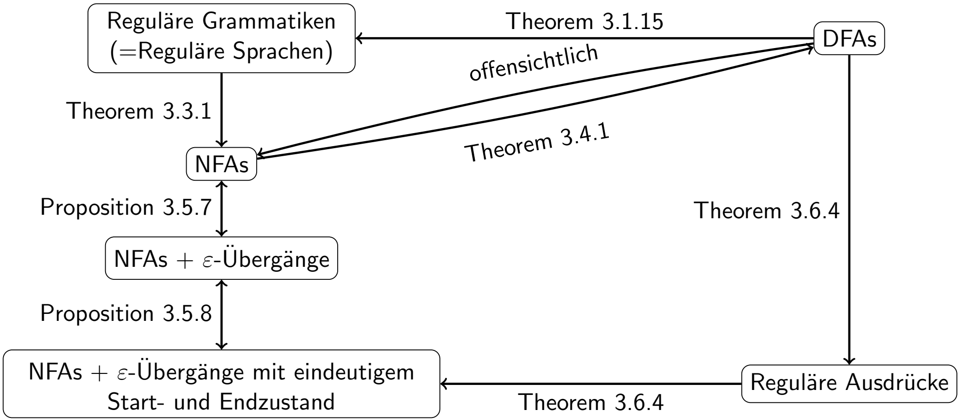
denn

$$\alpha^0_{1,1} = \varepsilon \qquad \alpha^0_{2,2} = \varepsilon \qquad \alpha^0_{1,2} = a \qquad \alpha^0_{2,1} = a$$

$$\alpha^1_{1,2} = (\alpha^0_{1,2}|\alpha^0_{1,1}(\alpha^0_{1,1})^*\alpha^0_{1,2}) = (a|\varepsilon(\varepsilon)^*a)$$

$$\alpha^1_{2,2} = (\alpha^0_{2,2}|\alpha^0_{2,1}(\alpha^0_{1,1})^*\alpha^0_{1,2}) = (\varepsilon|a(\varepsilon)^*a)$$

Zusammenfassung: Formalismen für reguläre Sprachen



Kanten $\rightarrow$ zeigen Kodierungen