

## Automatentheorie und Formale Sprachen

für die Studiengänge

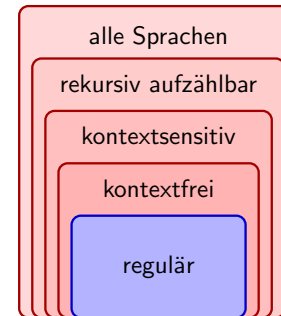
- Angewandte Informatik
- Informatik - Technische Systeme

### 05 Regularität widerlegen

Prof. Dr. David Sabel  
Sommersemester 2025

Stand der Folien: 21. Mai 2025

## Motivation zum Pumping-Lemma



Formalismen zur Darstellung von regulären Sprachen:

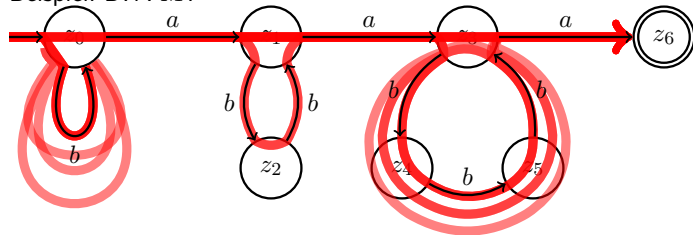
- Endliche Automaten
- Reguläre Ausdrücke
- Reguläre Grammatiken

Wie zeigt man, dass eine formale Sprache **nicht regulär** ist?

⇒ Das Pumping-Lemma ist ein Werkzeug dafür!

## Idee des Pumping-Lemmas: Beispiel

Beispiel: DFA  $M$ :

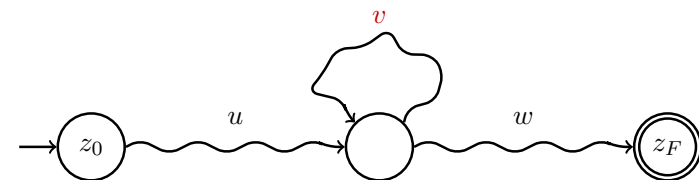


- Von  $M$  erkannte Wörter der Länge 3, 4, 5, 6, ...
- Beobachtung 1: Jedes Wort  $z$  mit Länge  $> 3$ , das  $M$  erkennt, **muss** mindestens eine **Schleife durchlaufen**.
- Beobachtung 2: Wenn wir die **Schleife mehrfach durchlaufen**, wird das entsprechende Wort immer noch erkannt, d.h.

Wörter in  $L(M)$  mit Länge  $> 3$  können wir **aufpumpen**

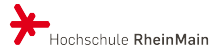
## Idee des Pumping-Lemmas: Allgemeiner

Gilt das allgemein?



- Wenn ein endlicher Automat  $n$  **Zustände** hat, dann müssen akzeptierte Wörter der **Länge  $\geq n$**  eine Schleife durchlaufen
- Diese Wörter kann man aufpumpen:  $uvw, uvvw, uvvww, \dots$   
Allgemein:  $uv^i w$  für  $i = 0, 1, 2, \dots$  liegen in der erkannten Sprache

## Das Pumping-Lemma



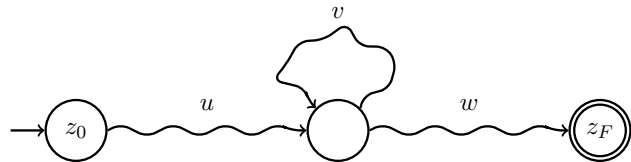
### Lemma 3.8.1 (Pumping-Lemma)

Jede reguläre Sprache  $L$  hat die folgende Pumping-Eigenschaft:

Es gibt eine Zahl  $n \in \mathbb{N}$ , sodass jedes Wort  $z \in L$ , welches Mindestlänge  $n$  hat (d.h.  $|z| \geq n$ ), als  $z = uvw$  geschrieben werden kann, so dass gilt:

- $|uv| \leq n$
- $|v| \geq 1$
- für alle  $i \geq 0$ :  $uv^i w \in L$ .

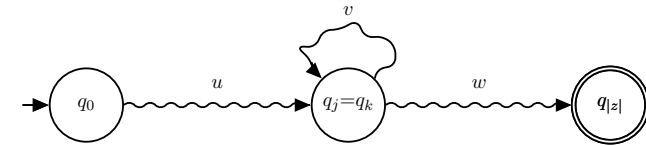
Die Zahl  $n$  nennt man auch die Pumping-Konstante der Sprache  $L$



## Beweis des Pumping-Lemmas (1)



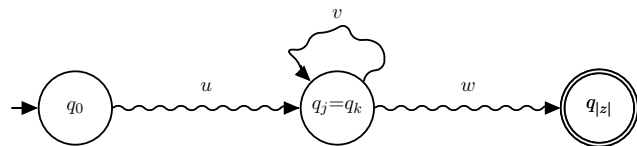
- Sei  $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$  ein DFA, der  $L$  akzeptiert mit  $|Z| = n$ .
- Jeder Lauf für ein  $z \in L$  besucht  $|z| + 1$  Zustände. Sei  $|z| \geq n$ . Sei  $q_0, q_1, \dots, q_{|z|}$  die besuchte Folge mit  $q_0 = z_0$  und  $q_{|z|} \in E$ .
- Da  $|Z| = n$ , wird spätestens nach Lesen von  $n$  Zeichen ein Zustand erneut besucht
- Sei  $q_k$  (mit  $k \leq n$ ) der erste Zustand, der bereits besucht wurde: D.h. es gibt  $j < k$ , sodass  $q_k = q_j$  und  $k$  ist minimal,  $z = uvw$  mit



## Beweis des Pumping-Lemmas (2)



...  
D.h. es gibt  $j < k$ , sodass  $q_k = q_j$  und  $k$  ist minimal,  $z = uvw$  mit



Wir zeigen nun die drei geforderten Eigenschaften der Zerlegung:

- Aus  $j < k$  folgt  $|v| \geq 1$ .
- Aus  $k \leq n$  folgt  $|uv| \leq n$ .
- Für  $i = 0$ : Aus  $q_j = q_k$  folgt  $\hat{\delta}(q_0, u) = q_j = \hat{\delta}(q_0, uv) = q_k$  und somit  $\hat{\delta}(q_0, uw) = \hat{\delta}(q_0, uvw) = q_{|z|} \in E$ , d.h.  $uv^0 w \in L(M)$ .  
Sei  $i > 0$ . Aus  $\hat{\delta}(q_j, v) = q_k = q_j$  folgt  $\hat{\delta}(q_j, v^i) = q_j$  und daher  $\hat{\delta}(q_0, uv^i w) = \hat{\delta}(q_k, v^i w) = \hat{\delta}(q_j, w) = q_{|z|} \in E$ . Daher gilt  $uv^i w \in L(M)$ .  $\square$

## Endliche Sprachen



### Zur Erinnerung: Pumping-Eigenschaft

Es gibt eine Zahl  $n \in \mathbb{N}$ , sodass jedes Wort  $z \in L$ , welches Mindestlänge  $n$  hat (d.h.  $|z| \geq n$ ), als  $z = uvw$  geschrieben werden kann, so dass gilt:

- $|uv| \leq n$
- $|v| \geq 1$
- für alle  $i \geq 0$ :  $uv^i w \in L$ .

Als prädikatenlogische Formel:

$$\exists n \in \mathbb{N}: \forall z \in L: (|z| \geq n \Rightarrow \exists u, v, w: (z = uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge \forall i \geq 0: (uv^i w \in L)))$$

Warum erfüllen **endliche Sprachen** das Pumping-Lemma?

Wähle  $n$  größer als die Länge des längsten Worts!

## Anwendung des Pumping-Lemmas



- Pumping-Lemma:  
Sprache regulär  $\implies$  Sprache erfüllt die Pumping-Eigenschaft
- Zeige, dass eine Sprache nicht regulär ist, durch Kontraposition:

Sprache erfüllt **nicht** die Pumping-Eigenschaft  
 $\implies$  Sprache ist **nicht** regulär

## Umformung der negierten Pumping-Eigenschaft



$$\begin{aligned} & \neg(\exists n \in \mathbb{N}: \forall z \in L: (|z| \geq n \Rightarrow \exists u, v, w: (z=uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge \forall i \geq 0: (uv^i w \in L)))) \\ \iff & \forall n \in \mathbb{N}: \neg(\forall z \in L: (|z| \geq n \Rightarrow \exists u, v, w: (z=uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge \forall i \geq 0: (uv^i w \in L)))) \\ \iff & \forall n \in \mathbb{N}: (\exists z \in L: (\neg(|z| \geq n) \vee (\exists u, v, w: (z=uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge \forall i \geq 0: (uv^i w \in L)))))) \\ \iff & \forall n \in \mathbb{N}: (\exists z \in L: ((|z| \geq n) \wedge \neg(\exists u, v, w: (z=uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge \forall i \geq 0: (uv^i w \in L)))))) \\ \iff & \forall n \in \mathbb{N}: (\exists z \in L: ((|z| \geq n) \wedge (\forall u, v, w: (\neg(z=uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1 \wedge \forall i \geq 0: (uv^i w \in L)))))) \\ \iff & \forall n \in \mathbb{N}: (\exists z \in L: ((|z| \geq n) \wedge (\forall u, v, w: ((z=uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1) \Rightarrow \neg(\forall i \geq 0: uv^i w \in L)))))) \\ \iff & \forall n \in \mathbb{N}: (\exists z \in L: ((|z| \geq n) \wedge (\forall u, v, w: ((z=uvw \wedge |uv| \leq n \wedge |v| \geq 1) \Rightarrow \exists i \geq 0: uv^i w \notin L)))) \end{aligned}$$

### Formale Sprache $L$ erfüllt **nicht** die Pumping-Eigenschaft:

Für **jede** Zahl  $n \in \mathbb{N}$  **gibt es** ein Wort  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$ ,  
sodass für **jede** Zerlegung  $z = uvw$  mit

- $|uv| \leq n$  und
- $|v| \geq 1$

ein  $i \geq 0$  **existiert** mit  $uv^i w \notin L$ .

## Anwendung des Pumping-Lemmas



### Satz

Die Sprache  $L = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}_0\}$  ist nicht regulär.

Beweis: Wir zeigen, dass  $L$  die Pumping-Eigenschaft **nicht erfüllt** und schließen mit dem Pumping-Lemma, dass  $L$  **nicht regulär** ist:

- Sei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig. Wir wählen  $z \in L$ :  
 $z = a^n b^n$  (damit ist auch  $|z| \geq n$  erfüllt).
- Sei  $z = uvw$  eine beliebige Zerlegung von  $z$ ,  
sodass  $|uv| \leq n$  und  $|v| \geq 1$ .
- Dann ist  $u = a^r, v = a^s$  mit  $r + s \leq n, s > 0$  und  $w = a^t b^n$  mit  $r + s + t = n$ .  
Daher können wir z.B.  $i = 2$  wählen und erhalten  
 $uv^i w = uv^2 w = a^r a^s a^s a^t b^n = a^{n+s} b^n \notin L$ , da  $s > 0$ . □

## Beweise Nicht-Regularität als Spiel



Sei  $L$  die formale Sprache.

- 1 Der **Gegner** wählt die Zahl  $n \in \mathbb{N}$ .
- 2 **Wir** wählen das Wort  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$ .
- 3 Der **Gegner** wählt Zerlegung  $z = uvw$  mit  $|uv| \leq n$  und  $|v| \geq 1$ .
- 4 **Wir** gewinnen das Spiel, wenn wir ein  $i \geq 0$  angeben können,  
sodass  $uv^i w \notin L$ .

Wenn wir das Spiel **für alle Wahlmöglichkeiten des Gegners**  
gewinnen, dann haben wir die Nichtregularität von  $L$  nachgewiesen.

**Satz**

Die Sprache  $L = \{a^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}$  ist nicht regulär.

Wir zeigen, dass wir das eben eingeführte Spiel stets gewinnen:

- ❶ Sei  $n \in \mathbb{N}$  vom Gegner gewählt.
- ❷ Wir wählen  $z \in L$  als  $z = a^p$  mit  $p$  ist die nächste Primzahl, die größer gleich  $n$  ist.
- ❸ Der Gegner wählt Zerlegung  $u = a^r$ ,  $v = a^s$ ,  $w = a^t$  mit  $uvw = a^p$ ,  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$  (und damit  $s \geq 1$ ).
- ❹ Wir wählen  $i = p + 1$ . Dann ist  $uv^i w \notin L$ , denn  
 $uv^i w = a^r (a^s)^{p+1} a^t = a^{r+s \cdot (p+1)+t} = a^{r+s \cdot p+s+t} = a^{s \cdot p+p} = a^{p \cdot (s+1)}$  und für  $s \geq 1$  folgt, dass  $p \cdot (s+1)$  keine Primzahl sein kann. □

**Quiz 1**

Wo ist der Fehler in folgendem Beweis?

Aussage: Die Sprache  $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$  ist nicht regulär.

Beweis. Sei  $n = 100$  (1).

Wir wählen  $z = a^{100} b^{100}$  (2).

Dann gilt  $z \in L$  (3) und  $|z| \geq n$  (4).

Sei  $z = uvw$  eine beliebige Zerlegung von  $z$  (5) mit  $|uv| \leq n$  (6) und  $|v| \geq 1$  (7).

Dann ist für  $i = 0$ :  $uv^i w = a^{100-|v|} b^{100}$  (8) und daher  $uv^0 w \notin L$  (9).

Daher verletzt  $L$  die Pumping-Eigenschaft für reguläre Sprachen (10) und  $L$  ist daher nicht regulär (11).

arsnova.hs-rm.de

6750 1376

**Quiz 2**

Wo ist der Fehler in folgendem Beweis?

Aussage: Die Sprache  $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$  ist nicht regulär.

Beweis. Sei  $n \geq 0$  (1).

Wir wählen  $z = a^n b^n$  (2).

Dann gilt  $z \in L$  (3) und  $|z| \geq n$  (4).

Wir zerlegen  $z = uvw$  mit  $u = \varepsilon$ ,  $v = a$ ,  $w = a^{n-1} b^n$  (5).  
Dann gilt  $|uv| \leq n$  (6) und  $|v| \geq 1$  (7).

Dann ist für  $i = 0$ :  $uv^i w = a^{n-1} b^n$  (8) und daher  $uv^0 w \notin L$  (9).

Daher verletzt  $L$  die Pumping-Eigenschaft für reguläre Sprachen (10) und  $L$  ist daher nicht regulär (11).

arsnova.hs-rm.de

6750 1376

**Quiz 3**

Wo ist der Fehler in folgendem Beweis?

Aussage: Die Sprache  $L = \{a^n a^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$  ist nicht regulär.

Beweis. Sei  $n \geq 0$  (1).

Wir wählen  $z = a^n a^n$  (2).

Dann gilt  $z \in L$  (3) und  $|z| \geq n$  (4).

Sei  $z = uvw$  eine beliebige Zerlegung von  $z$  (5) mit  $|uv| \leq n$  (6) und  $|v| \geq 1$  (7).

Dann ist für  $i = 0$ :  $uv^i w = a^{n-|v|} a^n$  (8) und daher  $uv^0 w \notin L$  (9).

Daher verletzt  $L$  die Pumping-Eigenschaft für reguläre Sprachen (10) und  $L$  ist daher nicht regulär (11).

arsnova.hs-rm.de

6750 1376



**Satz**

Die Sprache  $L = \{a^n \mid n \text{ ist Quadratzahl}\}$  ist nicht regulär.

1. Sei  $n \in \mathbb{N}$  vom Gegner gewählt.
  2. Wir wählen  $z = a^{n^2} \in L$ .
  3. Sei  $z = uvw$  vom Gegner zerlegt, sodass  $|uv| \leq n$  und  $|v| \geq 1$ .
  4. Wir wählen  $i = 2$ , d.h. wir betrachten  $uv^2w = a^k$ .
    - $1 + n^2 \leq k$  (denn  $|v| \geq 1$ )
    - $k \leq n^2 + n$  (denn  $|uv| \leq n$  und daher  $|v| \leq n$ ).
- Dann kann  $k$  jedoch keine Quadratzahl sein, denn  $n^2 + n = (n+1) \cdot n < (n+1)^2$ .  
Daher gilt  $uv^2w \notin L$ .  
Das Pumping-Lemma zeigt somit, dass  $L$  nicht regulär ist. □

**Satz**

Die Sprache  $L = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$  ist nicht regulär.

Beweis:

- Sei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig.
- Sei  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$  das Wort  $z = a^{2^n}$ .
- Sei  $z = uvw$  mit  $|uv| \leq n$  und  $|v| = k \geq 1$ .
- Dann ist  $1 \leq k \leq n$  und  $uv^2w = a^{2^n+k}$  und  $2^n + k \neq 2^l$  da  $2^n + k < 2^{n+1} = 2^n + 2^n$  denn  $k \leq n < 2^n$ .  
Daher ist  $uv^2w \notin L$ .

Mit dem Pumping-Lemma folgt, dass  $L$  nicht regulär ist. □

**Satz**

Die Sprache  $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ ist Palindrom}\}$  ist nicht regulär.

- Sei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig.
  - Wir wählen  $z = a^n b a^n \in L$  als Wort mit Mindestlänge  $n$ .
  - Sei  $z = uvw$  mit  $|uv| \leq n$  und  $|v| \geq 1$ .
  - Dann ist  $uv^0w = a^k b a^n$  mit  $k = n - |v| < n$  kein Palindrom.
- Mit dem Pumping-Lemma folgt, dass  $L$  nicht regulär ist. □

**Lemma**

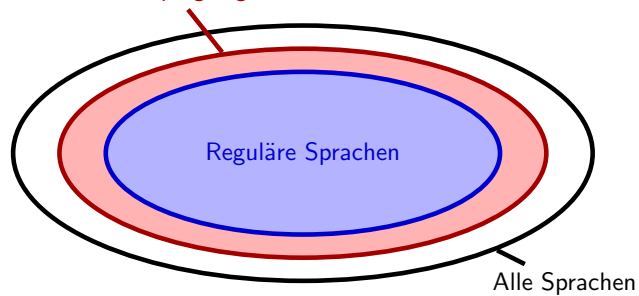
Es gibt Sprachen, die die Pumping-Eigenschaft erfüllen aber nicht regulär sind. Die Sprache  $L = \{a^k b^l c^l \mid k, l \in \mathbb{N}_0\} \cup \{b, c\}^*$  ist eine solche Sprache.

Beweis, dass  $L$  die Pumping-Eigenschaft erfüllt:

- Sei  $n \geq 1$  beliebig.
- Sei  $z \in L$  mit  $|z| \geq n$
- Wenn  $z \in \{b, c\}^*$ , zerlege  $z = uvw$  mit  $u = \varepsilon, v$  das erste Symbol von  $z$  und  $w$  der  $n-1$ -Zeichen lange Suffix von  $z$ . Offensichtlich gilt  $|v| \geq 1, |uv| \leq n$  und  $uv^i w \in \{b, c\}^* \subseteq L$  für alle  $i \in \mathbb{N}_0$ .
- Wenn  $z$  von der Form  $a^k b^l c^l$  ist und  $z \notin \{b, c\}^*$ , dann muss  $k > 0$  gelten und wir zerlegen  $z = uvw$  mit  $u = \varepsilon, v = a, w = a^{k-1} b^l c^l$ . Da  $|v| = 1, |uv| \leq n$  und  $uv^i w = a^{k+i-1} b^l c^l \in L$  für alle  $i \in \mathbb{N}_0$ , erfüllt  $L$  die Eigenschaften des Pumping-Lemmas.

## Mengendiagramm

Sprachen, die die Pumping-Eigenschaft erfüllen



### Wichtige Konsequenz

Das Pumping-Lemma kann **nicht** verwendet werden, um zu zeigen, dass eine Sprache regulär ist.

## Zusammenfassung Pumping-Lemma

- Das Pumping-Lemma formuliert **eine notwendige Bedingung** für **reguläre** Sprachen:

Sehr informell:

*Wörter einer regulären Sprache können aufgepumpt werden, wenn sie lang genug sind.*

- Anwendung:

$L$  erfüllt die **Pumping-Eigenschaft nicht**  $\Rightarrow L$  **nicht regulär**

- Das Pumping-Lemma gibt **keine hinreichende Bedingung** für reguläre Sprachen, d.h. Regularität kann **nicht** mit dem Pumping-Lemma gezeigt werden.
- Nicht-Regularität widerlegen funktioniert nicht in jedem Fall mit dem Pumping-Lemma!

## Quiz 4

Welche der folgenden Aussagen sind korrekte Formulierungen des Pumping-Lemmas?

1. Sei  $L$  eine reguläre Sprache. Dann gilt für jede natürliche Zahl  $n \geq 1$ : Es gibt ein Wort  $z$  aus  $L$ , welches Mindestlänge  $n$  hat, sodass für jede Zerlegung  $z = uvw$  mit  $|uv| \leq n$  und  $|v| \geq 1$  gibt es ein  $i \geq 0$  mit  $uv^i w$  liegt nicht in  $L$ .
2. Sei  $L$  eine formale Sprache. Dann ist  $L$  regulär, genau dann, wenn es eine natürliche Zahl  $n \geq 1$  gibt, sodass jedes Wort  $z$  aus  $L$ , welches Mindestlänge  $n$  hat, als  $z = uvw$  geschrieben werden kann, mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$ , und  $uv^i w$  liegt in  $L$  für alle  $i \geq 0$ .
3. Sei  $L$  eine formale Sprache. Dann ist  $L$  keinesfalls regulär, falls für jede natürliche Zahl  $n \geq 1$  gilt: Es gibt ein Wort  $z$  aus  $L$ , welches Mindestlänge  $n$  hat, sodass für jede Zerlegung  $z = uvw$  mit  $|uv| \leq n$  und  $|v| \geq 1$  gibt es ein  $i \geq 0$  mit  $uv^i w$  liegt nicht in  $L$ .
4. Sei  $L$  eine reguläre Sprache. Dann gibt es eine natürliche Zahl  $n \geq 1$ , sodass jedes Wort  $z$  aus  $L$ , welches Mindestlänge  $n$  hat, als  $z = uvw$  geschrieben werden kann, mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$ , und  $uv^i w$  liegt in  $L$  für alle  $i \geq 0$ .
5. Sei  $L$  eine formale Sprache und es gibt eine natürliche Zahl  $n \geq 1$ , sodass jedes Wort  $z$  aus  $L$ , welches Mindestlänge  $n$  hat, als  $z = uvw$  geschrieben werden kann, mit  $|uv| \leq n$ ,  $|v| \geq 1$ , und  $uv^i w$  liegt in  $L$  für alle  $i \geq 0$ . Dann ist  $L$  regulär.

arsnova.hs-rm.de

6750 1376



## Abschlusseigenschaften

### Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich Vereinigung, Produkt und Kleeneschem Abschluss.

### Beweis:

Vereinigung, Produkt und Kleenescher Abschluss werden durch reguläre Ausdrücke erzeugt und sind daher reguläre Sprachen:

- Benutze reguläre Ausdrücke  $\alpha_1, \alpha_2$  mit  $L(\alpha_i) = L_i$ .
- $(\alpha_1 | \alpha_2)$  erzeugt  $L(\alpha_1 | \alpha_2) = L(\alpha_1) \cup L(\alpha_2) = L_1 \cup L_2$ ,
- $\alpha_1 \alpha_2$  erzeugt  $L(\alpha_1 \alpha_2) = L(\alpha_1)L(\alpha_2) = L_1 L_2$  und
- $(\alpha_1)^*$  erzeugt  $L(\alpha_1)^* = L_1^*$ .

□

**Satz**

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich Komplementbildung.

**Beweis:**

- Sei  $M = (Z, \Sigma, \delta, z_0, E)$  ein DFA der  $L$  akzeptiert.
- Dann akzeptiert  $\overline{M} = (Z, \Sigma, \delta, z_0, Z \setminus E)$  die Sprache  $\overline{L}$  (d. h. das Komplement von  $L$ ):  
Offensichtlich gilt  $(\hat{\delta}(z_0, w) \in E) \iff \neg(\hat{\delta}(z_0, w) \in Z \setminus E)$
- Daher ist  $\overline{L}$  regulär.

### Abschlusseigenschaften (3)

### Satz

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich Schnitt.

**Beweis:**

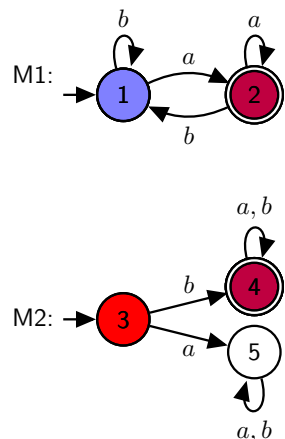
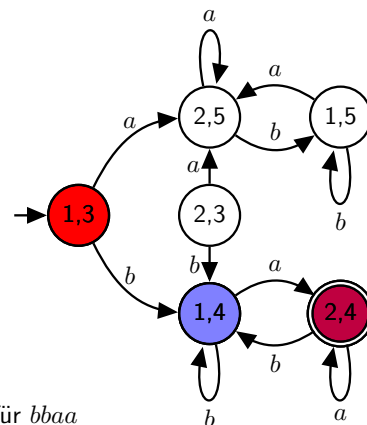
- Folgt aus  $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$  und da reguläre Sprachen abgeschlossen bez. Vereinigung und Komplementbildung.

Alternativ:

- Seien  $M_1 = (Z_1, \Sigma, \delta_1, z_{01}, E_1)$  und  $M_2 = (Z_2, \Sigma, \delta_2, z_{02}, E_2)$  DFAs, die  $L_1 = L(M_1)$  und  $L_2 = L(M_2)$  akzeptieren.
- **Produktautomat** von  $M_1$  und  $M_2$  ist der DFA  $M = (Z_1 \times Z_2, \Sigma, \delta, (z_{01}, z_{02}), E_1 \times E_2)$  mit  $\delta((z, z'), a) = (\delta_1(z, a), \delta_2(z', a))$  für alle  $a \in \Sigma$  und  $(z, z') \in Z_1 \times Z_2$ .
- $M$  akzeptiert  $L_1 \cap L_2$ , denn es gilt:  

$$\widehat{\delta}((z_{0,1}, z_{0,2}), w) \in (E_1, E_2) \iff \left( \widehat{\delta}_1(z_{0,1}, w) \in E_1 \wedge \widehat{\delta}_2(z_{0,2}, w) \in E_2 \right).$$

## Beispiel: Produktautomat

Produktautomat  $M_1 \times M_2$ 

Lauf für bbaa

## Abschlusseigenschaften zusammengefasst

### Theorem (Abschlusseigenschaften der regulären Sprachen)

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen bezüglich Vereinigung, Schnitt, Komplementbildung, Produkt und Kleeneschem Abschluss.

## Quiz 5

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen unter Schnitt:

Wenn  $L_1$  regulär und  $L_2$  regulär dann ist auch  $L_1 \cap L_2$  regulär.

Welche Folgerungen sind korrekt?

1. Wenn  $L_3 := L_1 \cap L_2$  nicht regulär ist, dann ist weder  $L_1$  noch  $L_2$  regulär.
2. Wenn  $L_3 := L_1 \cap L_2$  regulär ist, dann sind  $L_1$  und  $L_2$  regulär.
3. Wenn  $L_3 := L_1 \cap L_2$  nicht regulär ist und  $L_1$  regulär ist, dann ist  $L_2$  nicht regulär.
4. Wenn  $L_1$  und  $L_2$  jeweils nicht regulär sind, dann ist  $L_3 := L_1 \cap L_2$  ebenfalls nicht regulär.

arsnova.hs-rm.de  
6750 1376



## Nichtregulartät zeigen mit Abschlusseigenschaften (1) Hochschule RheinMain

### Satz

Die Sprache  $L = \{a^n \mid n \text{ ist keine Primzahl}\}$  ist nicht regulär.

### Beweis:

Durch Widerspruch:

- Annahme  $L$  ist regulär.
- Dann ist  $\bar{L}$  auch regulär.
- $\bar{L} = \{a\}^* \setminus L = \{a^n \mid n \text{ ist eine Primzahl}\}$  ist nicht regulär (bereits gezeigt)
- Widerspruch! Daher ist  $L$  nicht regulär.

## Nichtregulartät zeigen mit Abschlusseigenschaften (2) Hochschule RheinMain

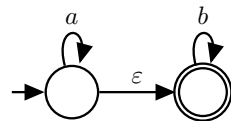
### Satz

Die Sprache  $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$  ist nicht regulär.

### Beweis:

Durch Widerspruch:

- Annahme:  $L$  ist regulär.
- Sprache  $L' = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N}_0\}$  ist regulär, da der folgende NFA mit  $\epsilon$ -Übergängen  $L'$  erkennt.
- Da  $L$  und  $L'$  regulär sind, ist auch  $L \cap L'$  regulär.
- $L \cap L' = \{a^j b^j \mid j \in \mathbb{N}_0\}$  ist aber nicht regulär (wie bereits gezeigt)
- Widerspruch! D.h.  $L$  ist nicht regulär.



## Vorsicht: Die folgenden Beweise sind alle falsch! Hochschule RheinMain

- **FALSCH:**  $L_x = \{x^n \mid n > 0\}$  ist regulär, reguläre Sprachen sind abgeschlossen unter Produktbildung, also  $L_a L_b = \{a^n b^n \mid n > 0\}$  ist regulär.
- **FALSCH:**  $L_{<} = \{a^n b^m \mid n < m\}$  ist nicht regulär,  $L_{\geq} = \{a^n b^m \mid n \geq m\}$  ist nicht regulär, also ist  $L_{<} \cup L_{\geq} = \{a^n b^m \mid n < m \text{ oder } n \geq m\}$  nicht regulär.
- **FALSCH:**  $L_1 = \{\epsilon, c\}$  ist regulär,  $L_2 = \{a^n b^n \mid n > 0\}$  ist nicht regulär, also ist  $L = \{c^i a^n b^n \mid n > 0, i \in \{0, 1\}\}$  nicht regulär.

**RICHTIG:**  $L = \{c^i a^n b^n \mid n > 0, i \in \{0, 1\}\}$  ist nicht regulär:

Annahme:  $L$  regulär. Da  $L(a^* b^*)$  regulär, ist auch  $L \cap L(a^* b^*)$  regulär. Aber  $L \cap L(a^* b^*) = \{a^n b^n \mid n > 0\}$  ist bekanntermaßen nicht regulär. Widerspruch!  $L$  kann nicht regulär sein.

- Bereits gezeigt: Das Wortproblem für Typ 1,2,3-Sprachen ist entscheidbar.
- Für DFAs ist das Wortproblem in Linearzeit in der Länge des Wortes lösbar, denn die Berechnung von  $\hat{\delta}(z_0, w)$  braucht für einen DFA nur  $|w|$  Schritte.

### Satz

Das Leerheitsproblem für reguläre Sprachen ist entscheidbar.

### Beweis:

- Sei  $L$  reguläre Sprache und sei  $M$  ein DFA mit  $L(M) = L$ .
- Dann gilt  $L = \emptyset$  genau dann, wenn es keinen Pfad vom Startzustand zu einem Endzustand in  $M$  gibt.
- Dies kann man leicht mit einer Tiefensuche auf dem Zustandsgraph von  $M$  überprüfen.

### Satz

Das Endlichkeitsproblem für reguläre Sprachen ist entscheidbar.

### Beweis:

- Sei  $L$  regulär und  $M$  ein DFA mit  $L(M) = L$
- Es gilt  $|L| < \infty$  g.d.w. es keinen Pfad vom Startzustand zu einem Endzustand gibt, der eine Schleife enthält.
- Prüfe dies mit einer Tiefensuche auf dem Zustandsgraph von  $M$ .

### Satz

Das Schnittproblem für reguläre Sprachen ist entscheidbar.

### Beweis:

- Seien  $L_1, L_2$  reguläre Sprachen.
- Seien  $M_1, M_2$  DFAs mit  $L(M_i) = L_i$ .
- Berechne den Produktautomaten  $M$  mit  $L(M) = L_1 \cap L_2$
- Prüfe das Leerheitsproblem für  $L(M)$ .

### Satz

Das Äquivalenzproblem für reguläre Sprachen ist entscheidbar.

### Beweis:

- Seien  $L_1, L_2$  reguläre Sprachen.
- Seien  $M_1, M_2$  DFAs mit  $L(M_i) = L_i$ .
- Berechne die Minimalautomaten von  $M_1$  und  $M_2$
- Prüfe die Minimalautomaten auf Isomorphie.

- Formalismen: Reguläre Grammatiken, DFAs, NFAs (mit oder ohne  $\varepsilon$ -Übergänge), reguläre Ausdrücke,
- Äquivalenzklassenautomat und Minimierung von DFAs
- NFA in DFA: Determinisierung mit Potenzmengenkonstruktion
- Pumping-Lemma (Pumping-Eigenschaft notwendig, nicht hinreichend!)
- Nicht-Regularität nachweisen: Pumping-Lemma
- Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen
- Entscheidbarkeitsresultate für reguläre Sprachen